STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Ellinor Fackle-Fornius

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I

2016-03-11

Skrivtid: 9.00-14.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.
Genomgång av tentamen sker 2016-03-31 kl. 15-16 i sal B307.

Uppgift 1. (20 poäng)

Märta Sälg är en erfaren fastighetsmäklare i Stockholm. Efter en analys har hon kommit fram till följande simultana fördelning för antal sålda objekt och antal nya objekt som hon får in per vecka:

		Antal sålda objekt		
		0	1	2
Antal nya objekt	0	$9c$	0.20	0.01
	1	0.1	0.29	0.23
	2	0.01	c	0.06

a) Bestäm konstanten c.

b) Beräkna väntevärdet för antal nya objekt och antal sålda objekt per vecka.

c) Beräkna korrelationen mellan antal nya objekt och antal sålda objekt per vecka.

Uppgift 2. (20 poäng)

En biolog kontrollerar ögonfärgen hos ett stort antal fruktflugor. Sannolikheten att en kontrollerad fluga har vita ögon är $1/4$ och sannolikheten att den har röda ögon är $3/4$. Kontrollerna kan antas vara oberoende.

a) Vad är sannolikheten att totalt minst fyra flugor måste kontrolleras tills man hittar den första flugan med vita ögon?

b) Vad är väntevärdet för totala antalet flugor som måste kontrolleras för att hitta en fluga med vita ögon?

c) Vad är sannolikheten att totalt minst fyra flugor måste kontrolleras tills man hittar två flugor med vita ögon?

d) Vad är väntevärdet för totala antalet flugor som måste kontrolleras för att hitta två flugor med vita ögon?

Uppgift 3. (20 poäng)

Företaget F^3 producerar bland annat frukostflingor. Enligt en modell är den dagliga produktionen och försäljningen av storsäljaren Fabulösa Flingor approximativt simultant normalfördelade med korrelation 0.6. Den dagliga produktionen antas vara approximativt normalfördelad med väntevärde 100 stycken och varians 625 och den dagliga försäljningen antas vara approximativt normalfördelad med väntevärde 100 stycken och varians 64.

a) Vad är sannolikheten att den dagliga försäljningen överstiger 110 stycken?

b) Vad är sannolikheten att den dagliga försäljningen överstiger den dagliga produktionen?

c) En förpackning säljs för 45 kronor. Den rörliga kostnaden för att producera en förpackning är 18 kr och den fasta kostnaden för produktionen är 1500 kr per dag. Beräkna förväntad daglig vinst.

Uppgift 4. (20 poäng)

Mäklaren Märta Sälg får varje månad en summa tilldelad från sin chef som hon får disponera för de kostnader hon har, såsom marknadsföringsutgifter. Hon får tilldelat en summa på Y_1 kr (i tiotusental) och hennes faktiska utgifter är Y_2 kr (i tiotusental) enligt den simultana täthetsfunktionen

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 3y_1, & 0 \le y_2 \le y_1 \le 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm marginalfördelningarna för Y_1 och Y_2.

b) Är Y_1 och Y_2 stokastiskt oberoende?

c) Märta hoppas kunna imponera på sin chef genom att spara in på utgifterna. Beräkna sannolikheten att hennes faktiska utgifter är mindre än hälften av den tilldelade summan, d.v.s. beräkna $P(Y_2 \le Y_1/2)$.

Uppgift 5. (20 poäng)

a) Låt Y vara en stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{2}, & 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Bestäm täthetsfunktionen för $U = Y^2$.

b) Låt Y vara en stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3y^2}{2}, & -1 \le y \le 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Bestäm täthetsfunktionen för $U = Y^2$.

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 11/3-2016

Sal: Värtasalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar 1

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: STM-0006

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					7 8
Lär.ant. 20	4	11	18	12					

65 + 0 bonus

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
65	D	[illegible]

SU, STATISTIK

Skrivsal: VÅ   Anonymkod: STM-0006   Blad nr: 1

1 a

$9c + 0,2 + 0,01 + 0,1 + 0,29 + 0,23 + 0,01 + c + 0,06 = 1 \Rightarrow$

$10c + 0,9 = 1 \qquad 10c = 0,1 \qquad c = 0,01$

Svar $c = 0,01$ R

4

b

		SÅLDA 0	1	2	
NYA	0	0,09	0,20	0,01	0,3
	1	0,1	0,29	0,23	0,62
	2	0,01	0,01	0,06	0,08
		0,2	0,5	0,3	

$E(SÅLDA) = 0,2 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 + 0,3 \cdot 2 = 1,1$

$E(NYA) = 0,3 \cdot 0 + 0,62 \cdot 1 + 0,08 \cdot 2 = 0,78$

Svar $E(SÅLDA) = 1,1 \quad E(NYA) = 0,78$ R

6

c

$V(SÅLDA) = (0-1,1)^2 \cdot 0,2 + (1-1,1)^2 0,5 + (2-1,1)^2 \cdot 0,3 =$

$= 0,49$ R

$V(NYA) = (0-0,78)^2 0,3 + (1-0,78)^2 \cdot 0,62 + (2-0,78)^2 \cdot 0,08 =$

$= 0,3316$ R

$cov = (0-1,1)(0-0,78) \cdot 0,09 + (1-1,1)(0-0,78) \cdot 0,2 +$

$+ (2-1,1)(0-0,78) \cdot 0,01 + (0-1,1)(1-0,78) \cdot 0,1 +$

$+ (1-1,1)(1-0,78) 0,29 + (2-1,1)(1-0,78) \cdot 0,23 +$

$+ (0-1,1)(2-0,78) \cdot 0,01 + (1-1,1)(2-0,78) 0,01 +$

$+ (2-1,1)(2-0,78) \cdot 0,06 = 0,152$ R

SU, STATISTIK

Skrivsal: VÄ Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 2

1 c $\rho = \frac{cov}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{0,152}{\sqrt{0,49 \cdot 0,336}} = 0,37708\ldots$

R

Svar korrelationen är ca 0,38.

10

20

SU, STATISTIK

Skrivsal: VÅ   Anonymkod: STM-C006   Blad nr: 3

$\underline{Y}$ = antal flyg som misst kontrolleras $\underline{Y} \sim Ge(p = \frac{1}{4})$

2

a $p(y) = \binom{n}{y} p^{y} (1-p)^{n-y}$ ✓ $n = 3$ $y = 3$ $p = \frac{3}{4}$

$p(3) = \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\left(1 - \frac{3}{4}\right)^{0} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3} = \frac{27}{64} = 0{,}421875$

Svar sannolikheten är ca 42 %   0

b

$E = \frac{r}{p} = \frac{1}{1/4} = 4$ OK

Svar väntevärdet är 4   R   2

c

$p(2) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3!}{2! \cdot 1!}\left(\frac{3}{4}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{3}$

$p(3) + p(2) = \left(\frac{3}{4}\right)^{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^{3} = 0{,}84375$

Svar sannolikheten är ca 84 %   V

0

d

$E = \frac{r}{p} = \frac{2}{1/4} = 8$

Svar väntevärdet är 8   R

2

4

SU, STATISTIK

Skrivsal: VÅ Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 4

3

a $\frac{X-\mu}{\sigma}$ $X=110$ $\mu=100$ $\sigma=\sqrt{64}=8$

$\frac{110-100}{8}=1{,}25$

$\Phi(1{,}25)=0{,}8944$

$1-\Phi(1{,}25)=0{,}1056$

Svar Ca 10,6% R 4

b

$\mu=100-100=0$ Motivera utförligare!

Svar 50% på grund av symmetri runt 0 3

c $E(Vinst)=45\cdot E(Y_2)-18\,E(Y_1)-1500$

$Vinst=(45-18)\cdot 100-1500=1200\,kr$

Svar vinst förväntas vara 1200kr

4

11

SU, STATISTIK

Skrivsal: VÄ Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 5

4

a $f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\, dy_2$

$f_1(y_1) = \int_0^{y_1} 3y_1\, dy_2 = 3y_1 \int_0^{y_1} dy_2 = 3y_1 \left[y_2 \right]_0^{y_1} = 3y_1^2$ R

$f_2(y_2) = \int_{y_2}^{1} 3y_1\, dy_1 = \left[\frac{3y_1^2}{2} \right]_{y_2}^{1} = \frac{3}{2} - \frac{3y_2^2}{2}$ R

$f_1(y_1) = \begin{cases} 3y_1^2, & \cancel{y_2 \le y_1 \le 1} \quad 0 \le y_1 \le 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

$f_2(y_2) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{3y_2^2}{2} & \cancel{0 \le y_2 \le y_1} \quad 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

6

b $3y_1^2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{3y_2^2}{2} \right) \neq 3y_1$

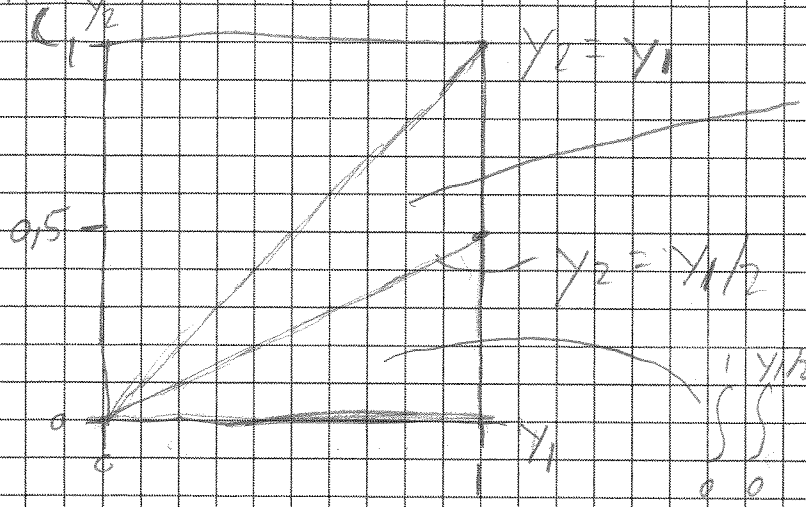
Svar de är inte stokastiskt oberoende R

2

SU, STATISTIK

Skrivsal: VÄ Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 6

4



$$\int_0^1\int_0^{y_1} dy_2\,dy_1$$

$y_2 = y_1/2$

$$\int_0^1\int_0^{y_1/2} dy_2\,dy_1$$

$$\int_0^1\int_0^{y_1/2} 3y_1\,dy_2\,dy_1 = \int_0^1 3y_1 \int_0^{y_1/2} dy_2\,dy_1 = \int_0^1 3y_1 \Big[y_2\Big]_0^{y_1/2} dy_1 =$$

$$\int_0^1 3y_1 \cdot \frac{y_1}{2}\,dy_1 = \int_0^1 \frac{3y_1^2}{2}\,dy_1 = \left[\frac{y_1^3}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

R

Svar 50%

10

18

SU, STATISTIK

Skrivsal: VÄ Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 7

5

a

$U = Y^2 \quad Y = \sqrt{U} \quad h^{-1}(u) = \sqrt{u}$ R

$\left|\frac{d\,h^{-1}(u)}{du}\right| = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ R $\quad f_Y(y) = \frac{y}{2}$

$f_U = f_Y[h^{-1}(u)]\left|\frac{dh^{-1}}{du}\right| = \frac{\sqrt{u}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{4}$ R

$0 \leq y \leq 2 \Rightarrow 0 \leq u \leq 4$ R

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 \leq u \leq 4 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$ R

8

b

$h^{-1}(u)\sqrt{u} \quad \left|\frac{d\,h^{-1}(u)}{du}\right| = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$f_Y(y) = \frac{3y^2}{2}$

$f_U = f_Y[h^{-1}(u)]\left|\frac{dh^{-1}}{du}\right| = \frac{3u}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{3\sqrt{u}}{4}$ ✓

$-1 \leq y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u \leq 1$ R

$$f(u) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{u}}{4}, & 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$ R

R transformationsmetoden kan inte användas direkt då $U = Y^2$ ej är "one-to-one"

4

12