STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Ellinor Fackle-Fornius

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I

2017-02-15

Skrivtid: 10.00-15.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.
Genomgång av tentamen sker 2017-03-06 kl. 14 i sal D307.

Uppgift 1. (20 poäng)

Vid tillverkningen av en kemisk produkt förekommer orenheter i en andel (Y) per batch. Y är en stokastisk variabel som antas ha följande täthetsfunktion

$$f(y) = \begin{cases} c(1-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm konstanten c.

b) Bestäm fördelningsfunktionen för Y.

c) Vad är sannolikheten att andelen orenheter är mellan 10 och 30 procent?

d) Vad är sannolikheten att andelen orenheter är mer än 10 procent givet att andelen orenheter är mindre än 30 procent?

Uppgift 2. (20 poäng)

En kommun har satt upp en modell för antalet tillbud vid ett särskilt olycksdrabbat vägavsnitt. Enligt kommunen följer antalet tillbud per vecka vid det aktuella vägavsnittet approximativt en Poissonfördelning.

a) Beräkna väntevärdet för antalet tillbud per vecka om sannolikheten att det är 0 tillbud per vecka är 0.1108.

b) Vad är sannolikheten att det blir fler än 2 tillbud under en vecka?

c) Vad är sannolikheten att det blir minst 3 veckor som är fria från tillbud under en 6-veckorsperiod?

Uppgift 3. (20 poäng)

Den dagliga vedåtgången (Y) i ett pappersbruk antas enligt en modell vara exponentialfördelad med väntevärde 5 ton. Den dagliga kostnaden för pappersbruket är proportionell mot $U = 4Y + 1$.

a) Bestäm fördelningsfunktionen för Y.

b) Beräkna sannolikheten att vedåtgången överstiger 5 ton per dag.

c) Hur mycket ved behöver beställas för en dag om man vill att sannolikheten att veden tar slut ska vara högst 0.05.

d) Bestäm täthetsfunktionen för den dagliga kostnaden (U).

Uppgift 4. (20 poäng)

Jens Javelin ställer upp i en spjuttävling där kvalgränsen för att ta sig till final är 65 meter. Han får göra fyra kast i kvalomgången. Antag att längden av varje kast är likformigt fördelat i intervallet 0 till 80 meter och att kasten är stokastiskt oberoende av varandra.

a) Bestäm täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen för hans längsta kast i kvalomgången.

b) Vad är sannolikheten att han tar sig till final?

c) Vad är väntevärdet i fördelningen för hans längsta kast i kvalomgången?

d) Vad händer med väntevärdet i c) om antalet kast som han får göra i kvalomgången ökar?

Uppgift 5. (20 poäng)

Företaget F^3 fyller varje dag sina bensintankar till en andel som de sedan säljer till sina kunder. Antag att Y_1 är andelen som fylls på och att Y_2 är andelen som säljs, observera att $Y_2 \leq Y_1$. Den simultana täthetsfunktionen för Y_1 och Y_2 ges av

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 6(1 - y_1), & 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm marginalfördelningarna för Y_1 och Y_2.

b) Beräkna väntevärdet för andelen andelen som fylls på varje dag samt för andelen som säljs varje dag.

c) Beräkna kovariansen mellan Y_1 och Y_2.

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 15/2-2017

Sal: Värtasalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar 15 hp

ANONYMKOD: ST-0030

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					5
Lär.ant. 20	20	14	20	12					

86 + 8 bonus

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
94	A	

SU, STATISTIK

Skrivsal: Vårtasalen Anonymkod: ST-0030 Blad nr: 1

Uppgift 1

Y = andel orenheter per batch

$f(y) = \begin{cases} c(1-y) & 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

a) $f(y) = \int_0^1 c(1-y)\,dy = c\int_0^1 (1-y)\,dy = 1$ R

$c\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1$

$c\left[1 - \frac{1}{2}\right] = 1$

$c - \frac{c}{2} = 1$

$2c - c = 2$

$c = 2$

Svar $c = 2$ R

5

b) $F(y) = \int_0^y 2(1-t)\,dt = \left[2t - \frac{2t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=y} =$

$2y - \frac{2y^2}{2} - 0 =$

$2y - y^2$

Svar: $F(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 2y - y^2 & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$ R

5

c) $P(0{,}1 \le Y \le 0{,}3) = P(Y \le 0{,}3) - P(Y \le 0{,}1) =$

$F(0{,}3) - F(0{,}1) = [2 \cdot 0{,}3 - 0{,}3^2] - [2 \cdot 0{,}1 - 0{,}1^2] =$

$0{,}51 - 0{,}19 = \underline{0{,}32}$ R

Svar: Slh att andelen orenheter är mellan 10 och 30 procent är 0,32. 4

d) Söker $P(Y > 0{,}1 \mid Y < 0{,}3)$

$P(Y > 0{,}1 \mid Y < 0{,}3) = \dfrac{P(Y > 0{,}1 \cap Y < 0{,}3)}{P(Y < 0{,}3)}$ R

Snitthändelsen för att $Y > 0{,}1$ och $Y < 0{,}3$ är när Y ligger i intervallet mellan 0,1 och 0,3, vilket räknades ut i uppgift (c) och var 0,32 R

I samma uppgift beräknade jag även $P(Y < 0{,}3)$ som var 0,51. Insättning ger:

$P(Y > 0{,}1 \mid Y < 0{,}3) = \dfrac{0{,}32}{0{,}51} \approx \underline{0{,}627}$ R

Svar: Slh att andelen orenheter är större än 10 procent givet att andelen är mindre än 30 procent är ca 0,627. 6

20

SU, STATISTIK

Skrivsal: Värtasalen **Anonymkod:** ST-0030 **Blad nr:** 2

Uppgift 2

Y = antalet tillbud vid ett vägavsnitt per vecka

$Y \sim Po(\lambda)$

a) $E(Y) = \lambda$ när Y är Poissonfördelat. Vi söker alltså efter λ. Vi vet att $p(0) = 0,1108$

R

$p(y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$

$p(0) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!}$

$p(0) = e^{-\lambda}$

$0,1108 = e^{-\lambda}$

$\ln(0,1108) = -\lambda$

$-2,20 = -\lambda$

$\lambda = 2,2$

Svar: $E(Y) = \lambda = 2,2$ R

6

b) $P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2)] =$

$1 - \left[0,1108 + \left[\frac{2,2^1 \cdot e^{-2,2}}{1!}\right] + \left[\frac{2,2^2 \cdot e^{-2,2}}{2!}\right]\right] =$

$1 - [0,1108 + 0,2438 + 0,2681] = 1 - 0,6227 = 0,3773$

R

Svar: Slh att det blir mer än 2 tillbud under en vecka är 0,3773

6

c) X = antal veckor fria från tillbud av 6 veckor

$X \sim Bin(n=6 \quad p=0{,}1108)$ → p(0) från uppgift 1a)

R

$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2)] =$

$1 - [\binom{6}{0} 0{,}1108^0 \, 0{,}8892^6 + \binom{6}{1} 0{,}1108^1 \cdot 0{,}8892^5 + \binom{6}{2} 0{,}1108^2 \cdot 0{,}8892^4] =$

$1 - [0{,}494 + 0{,}370 + 0{,}115] = 1 - 0{,}979 = \underline{0{,}021}$ R

Svar: Slh att minst 3 veckor är fria från tillbud under en 6-veckors period är 0,021.

8

20

SU, STATISTIK

Skrivsal: Värtasalen **Anonymkod:** ST-0030 **Blad nr:** 3

Uppgift 3

Y = daglig vedåtgång i ton i ett pappersbruk

$Y \sim Exp(5)$

U = daglig kostnad för pappersbruket

$U = 4Y + 1$

a) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-y/5} & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$ R

$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{5} e^{-t/5} dt = \left[-e^{-t/5} \right]_{t=0}^{t=y} =$

$-e^{-y/5} - (-1) = \underline{\underline{1 - e^{-y/5}}}$ R

Svar: $F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y/5} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$ R

5

b) $P(Y > 5) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - F(5) =$

$1 - (1 - e^{-5/5}) = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}368 = \underline{\underline{0{,}632}}$ 2

Svar: Slh att vedåtgången överstiger 5 ton per dag är 0,632 ✓

c) Veden tar slut när Y når sitt max-värde

Slh för att max-värdet ska nås får max vara 0,05

Vi sätter alltså att:

$f_{Y(n)}(y) = 0{,}05$ ✓

$f_{Y(1)}(y) = 1 \left[1 - e^{-y/5} \right]^0 \cdot \frac{1}{5} e^{-y/5} = 0{,}05$

$\frac{e^{-y/5}}{5} = 0{,}05$

$e^{-y/5} = 0{,}25$

$-y/5 = \ln(0{,}25)$

$-y = 5 \cdot \ln(0{,}25)$

$-y = -6{,}931471806$

$\underline{\underline{y \approx 6{,}931}}$

Svar: Man måste beställa ca 6,931 ton veckan. ✓ 0

d) U är strängt växande i vårt definitionsområde, därav kan transformationsmetoden användas. R

Det minsta värdet Y kan anta är 0, vilket ger att det minsta värdet U kan anta är 1. $(U = 4 \cdot 0 + 1 = 1)$ R

Vi måste först bestämma den inversa funktionen av U

$u(y) = 4y + 1$

$u = 4y + 1$

$u - 1 = 4y$

$y = \frac{u-1}{4} \Rightarrow h^{-1}(u) = \frac{u-1}{4}$ R $\frac{dh^{-1}(u)}{du} = \frac{1}{4}$ R

$f_U(u) = f_Y(h^{-1}(u)) \left| \frac{dh^{-1}}{du} \right|$ där $\frac{dh^{-1}}{du} = \frac{d[h^{-1}(u)]}{du}$

Insättning ger:

$f_U(u) = \frac{1}{5} e^{-\left(\frac{u-1}{4}\right)/5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20} e^{-\left(\frac{u-1}{4}\right)/5} = \underline{\underline{\frac{1}{20} e^{-(u-1)/20}}}$ R

Svar: $f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{20} e^{-(u-1)/20} & u \geq 1 \\ 0 & u < 1 \end{cases}$ R

7 Bra!

14

SU, STATISTIK

Skrivsal: Vårtasalen **Anonymkod:** ST-0030 **Blad nr:** 4

Uppgift 4

Y = längden av ett kast i en spjuttävling i meter

$Y \sim Unif(0, 80)$

a) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{80} & 0 \le y \le 80 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ R

Vi söker efter täthets- och fördelningsfunktionen för hans längsta kast, dvs max-värdet av n=4 kast

Formeln för max-värdets fördelningsfunktion:

$F_{Y(n)}(y) = [F_Y(y)]^n$

Vi måste först bestämma $F_Y(y)$

$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{80}\, dt = \left[\frac{t}{80}\right]_{t=0}^{t=y} = \frac{y}{80}$ R

$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{y}{80} & 0 \le y < 80 \\ 1 & y > 80 \end{cases}$ R

$F_{Y(4)}(y) = \underline{\underline{\left[\frac{y}{80}\right]^4}}$ R

Formeln för max-värdets täthetsfunktion:

$f_{Y(n)}(y) = n[F_Y(y)]^{n-1} f_Y(y)$

Insättningar:

$f_{Y(4)}(y) = 4\left[\frac{y}{80}\right]^3 \cdot \frac{1}{80} = \frac{4}{80}\left[\frac{y}{80}\right]^3$ R

Svar: $f_{Y(4)}(y) = \begin{cases} \frac{4}{80}\left[\frac{y}{80}\right]^3 & 0 \le y \le 80 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ R

$F_{Y(4)}(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \left[\frac{y}{80}\right]^4 & 0 \le y \le 80 \\ 1 & y > 80 \end{cases}$ R

6

b) $P(Y_{(4)} > 65) = 1 - P(Y_{(4)} \leq 65) = 1 - F_{Y_{(4)}}(65) =$

$1 - \left[\frac{65}{80}\right]^4 = 1 - 0{,}436 = \underline{0{,}564}$ R

Svar: Slh att han kommer till final är 0,564 4

c) $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)\, dy$

$E(Y_{(4)}) = \int_0^{80} y \cdot \frac{4}{80}\left[\frac{y}{80}\right]^3 dy = \int_0^{80} \frac{4y}{80}\left[\frac{y^3}{512000}\right] dy =$ R

$\int_0^{80} \frac{4y^4}{40960000}\, dy = \left[\frac{4 \cdot y^5}{5 \cdot 40960000}\right]_{y=0}^{y=80} =$

$\frac{4 \cdot 80^5}{5 \cdot 40960000} = \underline{64}$ R

Svar: Väntevärdet för hans längsta kast är 64 m. 5

d) Eftersom vi har en likformig fördelning innebär det att slh för att kasta 0 m är samma som för att kasta 80 m. Om man gör flera kast ökar därmed slh att få ett högt värde som max-värde. Detta drar i sin tur upp väntevärdet för max-funktionen. Svaret är alltså att väntevärdet ökar när antalet kast ökar. R

5

20

SU, STATISTIK

Skrivsal: Värtasalen **Anonymkod:** ST-0030 **Blad nr:** 5

Uppgift 5

Y_1 = andelen av bensintankarna som fylls

Y_2 = andelen av bensintankarna som fylls [sic: "dålig"?]

$$f(y_1,y_2) = \begin{cases} 6(1-y_1) & 0 \le y_2 \le y_1 \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a) $f_1(y_1) = \int_0^{y_1} 6(1-y_1)\,dy_2 = \int_0^{y_1} 6-6y_1\,dy_2 = \left[6y_2 - 6y_1y_2\right]_{y_2=0}^{y_2=y_1}$

$\underline{\underline{6y_1 - 6y_1^2}}$ R def.omr.?

$f_2(y_2) = \int_0^1 6-6y_1\,dy_1 = \left[6y_1 - \frac{6y_1^2}{2}\right]_{y_1=0}^{y_1=1} =$ ✓

$6-3 = \underline{\underline{3}}$ ✓ 3

b) $E(Y_1) = \int_0^1 y_1(6y_1 - 6y_1^2)\,dy_1 = \left[\frac{6y_1^3}{3} - \frac{6y^4}{4}\right]_{y_1=0}^{y_1=1} = 2 - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ R

$E(Y_2) = \int_0^{y_1} y_2\, 3\,dy_2 = \left[\frac{3y_2^2}{2}\right]_{y_2=0}^{y_2=y_1} = \underline{\underline{\frac{3y_1^2}{2}}}$ ✓ $f(y_1)$! 3

c) $Cov(Y_1,Y_2) = E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2)$

$E(Y_1Y_2) = \int_0^1\int_0^{y_1} y_1y_2(6-6y_1)\,dy_2\,dy_1 =$ R

$\int_0^1 y_1\left[\frac{6y_2^2}{2} - \frac{6y_1y_2^2}{2}\right]_{y_2=0}^{y_2=y_1} dy_1 =$

$\int_0^1 y_1\left(3y_1^2 - 3y_1^3\right)dy_1 =$

$\int_0^1 3y_1^3 - 3y_1^4\,dy_1 = \left[\frac{3y_1^4}{4} - \frac{3y_1^5}{5}\right]_{y_1=0}^{y_1=1} = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{15-12}{20} = \frac{3}{20}$

R

$$\text{Cov}(Y_1,Y_2) = \frac{3}{20} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3y_1^2}{2}\right) = \frac{3}{20} - \frac{3y_1^2}{4} = \underline{\underline{\frac{3-15y_1^2}{20}}}$$

svar: Kovariansen är $\frac{3-15y_1^2}{20}$ ✓

$f(y_1)$!

6

12