Stockholms universitet
Statistiska institutionen
Raul Cano

SKRIVNINGSDATUM: 29-03-2017

Skriftlig tentamen i **Statistikens grunder 1** (6 hp), ingående som moment 1 i kursen **Statistikens grunder, GN, 15 hp.**

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Miniräknare. Vidhäftade formel- och tabellblad (obs! vidhäftas endast de tabellsidor som behövs för den här tentamen).
Tentamensgenomgång och återlämning. Onsdagen den 19 april, kl. 18.00 i B319.
Därefter kan skrivningarna hämtas på studentexpeditionen, plan 7 i B-huset.

Tentamen består av fem uppgifter som kan ge totalt 100 poäng. För betyget A gäller 90-100 p., för betyget B gäller 80-89 p., för betyget C gäller 70-79 p., för betyget D gäller 60-69 p., för betyget E gäller 50-59 p., för betyget Fx gäller 40-49 p. och för betyget F gäller 0-39 p. För detaljerade betygskriterier se kursbeskrivningen på kurshemsidan.
För full poäng på en uppgift krävs fullständiga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1: (20 poäng)
I den stora staden Grönköping undersöker man om det föreligger ett samband mellan utbildningsnivå X (antal år studerat efter gymnasieutbildning) och inkomst Y(månadsinkomst i tusentals kronor). Målpopulationen består av alla röstberättigade personer som bor i Grönköping.
Man föreslår följande sannolikhetsmodell för X och Y:

	x = 0	1	2	3	4	5
y=20	0,06	0,05	0,06	0,05	0,04	0,06
30	0,04	0,03	0,05	0,07	0,06	0,07
40	0,03	0,04	0,04	0,08	0,10	0,07

Enligt modellen, vad är sannolikheten att en slumpmässigt utvalt person

a). har en inkomst högre än 30 000? (5 poäng)
b). har en inkomst högre än 30 000 givet att personen i fråga har studerat i mer än 2 år? (5 poäng)
c). har en inkomst lägre än 40 000 eller har studerat i mindre än 4 år eller båda? (5 poäng)
d). har en inkomst lägre än 30 000 och har studerat i mer än 3 år? (5 poäng)

Uppgift 2: (20 poäng)
I den stora staden Grönköping vet vi att 45% av alla röstberättigade personer röstar på piratpartiet. Vidare vet vi att 30% av alla röstberättigade personer gillar att resa till Mallorca på sommaren (10% gillar att resa till Mallorca på sommaren och röstar på piratpartiet, 20% gillar att resa till Mallorca på sommaren och inte röstar på piratpartiet).

En person (bland alla röstberättigade personer i Grönköping) väljs slumpmässigt.

a). Vad är den betingade sannolikheten att den valda personen röstar på piratpartiet, givet att personen i fråga gillar att resa till Mallorca på sommaren? (5 poäng)
b). Vad är den betingade sannolikheten att den valda personen inte röstar på piratpartiet, givet att personen i fråga inte gillar att resa till Mallorca på sommaren? (5 poäng)
c). Vad är den betingade sannolikheten att den valda personen gillar att resa till Mallorca på sommaren, givet att personen i fråga röstar på piratpartiet? (5 poäng)
d). Vad är sannolikheten att den valda personen röstar på piratpartiet och gillar att resa till Mallorca på sommaren? (5 poäng)

Uppgift 3: (20 poäng)
I den stora staden Grönköping röstar 45% av alla röstberättigade personer på piratpartiet.
Man drar ett slumpmässigt stickprov på 9 röstberättigade personer. Hur stor är sannolikheten att stickprovet skall innehålla

a). högst 6 personer som röstar på piratpartiet? (5 poäng)
b). precis 6 personer som röstar på piratpartiet? (5 poäng)
c). minst 2 personer som röstar på piratpartiet? (5 poäng)
d). högst 3 personer som inte röstar på piratpartiet? (5 poäng)

Uppgift 4: (20 poäng)
Antag att kroppslängd hos manliga röstberättigade personer i den stora staden Grönköping är normalfördelad med väntevärdet 180 cm och standardavvikelsen 10 cm.

a). Hur stor är sannolikheten att kroppslängden på en slumpmässigt utvalt person (från målpopulationen) är större än 185 cm? (10 poäng)

b). Man drar ett slumpmässigt stickprov på 6 personer (från målpopulationen). Hur stor är sannolikheten att stickprovet skall innehålla högst en person som har en kroppslängd mindre än 170 cm? (10 poäng)

Uppgift 5: (20 poäng)
I den stora staden Grönköping undersöker man om det föreligger ett samband mellan utbildningsnivå X (antal år studerat efter gymnasieutbildning) och inkomst Y(månadsinkomst i tusentals kronor).
Målpopulationen består av alla röstberättigade personer som bor i Grönköping.
Man föreslår följande förenklade sannolikhetsmodell för X och Y:

	x=1	2	3
y=20	0,08	0,12	0,30
30	0,12	0,18	0,20

a). Enligt modellen, påvisa att utbildningsnivå och inkomst är beroende eller oberoende. (5 poäng)
b). Ange den betingade sannolikhetsfördelningen för Y givet att X = 3. (5 poäng)
c). Beräkna korrelationen mellan X och Y. (10 poäng)

FORMLER

Additionssatsen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Multiplikationssatsen: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Väntevärde för diskret s.v. X:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x \in \Omega_x} x f(x)$$

Varians för diskret s.v. X:

$$\sigma_X^2 = V(X) = E[(X - \mu_X)^2] = \sum_{x \in \Omega_x} [x - E(X)]^2 f(x)$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{x \in \Omega_x} x^2 f(x) - [E(X)]^2$$

Två diskreta s.v. X och Y med simultanfrekvensfunktion $f(x, y)$

$$f_X(x) = \sum_{y \in \Omega_Y} f(x, y) \qquad f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Kovarians och korrelation för två diskreta s.v. X och Y, ($\mu_X = E(X)$ och $\mu_Y = E(Y)$):

$$Cov(X, Y) = \sum_{x \in \Omega_x} \sum_{y \in \Omega_y} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) = \sum_{x \in \Omega_x} \sum_{y \in \Omega_y} xy f(x, y) - \mu_X \mu_Y$$

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{SD(X) \cdot SD(Y)} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

Räkneregler för väntevärden och varianser (a, b, c är konstanter och X, Y är s.v.)

$E(c) = c$	$V(c) = 0$
$E(X + c) = E(X) + c$	$V(X + c) = V(X)$
$E(aX) = aE(X)$	$V(aX) = a^2 V(X)$
$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$	$V(aX + bY + c) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab Cov(X, Y)$

Binomialfördelningen: $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n - x)!} p^x (1 - p)^{n-x}$

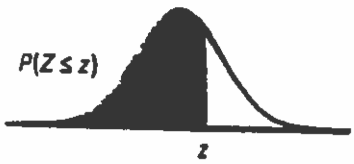
Poissonfördelningen: $f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

Exponentialfördelningen: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

TABELL 1. Normalfördelningen, standardiserad

$\Phi(z) = P(Z \le z)$ där $Z \in N(0, 1)$.

För negativa värden, utnyttja att $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

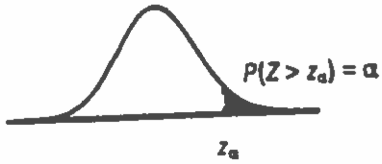
Statistiska inst., Sthlm:s univ.

TABELL 2. **Normalfördelningens kvantiler, standardiserad**

$Z \in N(0, 1)$. Vilket värde har z_α om $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ där α är en given sannolikhet.

Utnyttja även $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ för $P(Z \leq -z_\alpha)$.

α	x_α
0,1	1,2816
0,05	1,6449
0,025	1,9600
0,010	2,3263
0,005	2,5758
0,0025	2,8070
0,0010	3,0902
0,0005	3,2905
0,00025	3,4808
0,00010	3,7190
0,00005	3,8906
0,000025	4,0556
0,000010	4,2649
0,000005	4,4172



TABELL 6. Binomial-fördelningen; $n = 2,\dots,9$

$P(X \le x)$ där $X \in Bin(n, p)$. För $p > 0,5$, utnyttja att $P(X \le x) = P(Y \ge n\text{-}x)$ där $Y \in Bin(n, 1\text{-}p)$

n	x	p = 0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
2	0	0,90250	0,81000	0,72250	0,64000	0,56250	0,49000	0,42250	0,36000	0,30250	0,25000
	1	0,99750	0,99000	0,97750	0,96000	0,93750	0,91000	0,87750	0,84000	0,79750	0,75000
3	0	0,85738	0,72900	0,61413	0,51200	0,42188	0,34300	0,27463	0,21600	0,16638	0,12500
	1	0,99275	0,97200	0,93925	0,89600	0,84375	0,78400	0,71825	0,64800	0,57475	0,50000
	2	0,99988	0,99900	0,99663	0,99200	0,98438	0,97300	0,95713	0,93600	0,90888	0,87500
4	0	0,81451	0,65610	0,52201	0,40960	0,31641	0,24010	0,17851	0,12960	0,09151	0,06250
	1	0,98598	0,94770	0,89048	0,81920	0,73828	0,65170	0,56298	0,47520	0,39098	0,31250
	2	0,99952	0,99630	0,98802	0,97280	0,94922	0,91630	0,87352	0,82080	0,75852	0,68750
	3	0,99999	0,99990	0,99949	0,99840	0,99609	0,99190	0,98499	0,97440	0,95899	0,93750
5	0	0,77378	0,59049	0,44371	0,32768	0,23730	0,16807	0,11603	0,07776	0,05033	0,03125
	1	0,97741	0,91854	0,83521	0,73728	0,63281	0,52822	0,42842	0,33696	0,25622	0,18750
	2	0,99884	0,99144	0,97339	0,94208	0,89648	0,83692	0,76483	0,68256	0,59313	0,50000
	3	0,99997	0,99954	0,99777	0,99328	0,98438	0,96922	0,94598	0,91296	0,86878	0,81250
	4	1,00000	0,99999	0,99992	0,99968	0,99902	0,99757	0,99475	0,98976	0,98155	0,96875
6	0	0,73509	0,53144	0,37715	0,26214	0,17798	0,11765	0,07542	0,04666	0,02768	0,01563
	1	0,96723	0,88574	0,77648	0,65536	0,53394	0,42018	0,31908	0,23328	0,16357	0,10938
	2	0,99777	0,98415	0,95266	0,90112	0,83057	0,74431	0,64709	0,54432	0,44152	0,34375
	3	0,99991	0,99873	0,99411	0,98304	0,96240	0,92953	0,88258	0,82080	0,74474	0,65625
	4	1,00000	0,99995	0,99960	0,99840	0,99536	0,98906	0,97768	0,95904	0,93080	0,89063
	5	1,00000	1,00000	0,99999	0,99994	0,99976	0,99927	0,99816	0,99590	0,99170	0,98438
7	0	0,69834	0,47830	0,32058	0,20972	0,13348	0,08235	0,04902	0,02799	0,01522	0,00781
	1	0,95562	0,85031	0,71658	0,57672	0,44495	0,32942	0,23380	0,15863	0,10242	0,06250
	2	0,99624	0,97431	0,92623	0,85197	0,75641	0,64707	0,53228	0,41990	0,31644	0,22656
	3	0,99981	0,99727	0,98790	0,96666	0,92944	0,87396	0,80015	0,71021	0,60829	0,50000
	4	0,99999	0,99982	0,99878	0,99533	0,98712	0,97120	0,94439	0,90374	0,84707	0,77344
	5	1,00000	0,99999	0,99993	0,99963	0,99866	0,99621	0,99099	0,98116	0,96429	0,93750
	6	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99994	0,99978	0,99936	0,99836	0,99626	0,99219
8	0	0,66342	0,43047	0,27249	0,16777	0,10011	0,05765	0,03186	0,01680	0,00837	0,00391
	1	0,94276	0,81310	0,65718	0,50332	0,36708	0,25530	0,16913	0,10638	0,06318	0,03516
	2	0,99421	0,96191	0,89479	0,79692	0,67854	0,55177	0,42781	0,31539	0,22013	0,14453
	3	0,99963	0,99498	0,97865	0,94372	0,88618	0,80590	0,70640	0,59409	0,47696	0,36328
	4	0,99998	0,99957	0,99715	0,98959	0,97270	0,94203	0,89391	0,82633	0,73962	0,63672
	5	1,00000	0,99998	0,99976	0,99877	0,99577	0,98871	0,97468	0,95019	0,91154	0,85547
	6	1,00000	1,00000	0,99999	0,99992	0,99962	0,99871	0,99643	0,99148	0,98188	0,96484
	7	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998	0,99993	0,99977	0,99934	0,99832	0,99609
9	0	0,63025	0,38742	0,23162	0,13422	0,07508	0,04035	0,02071	0,01008	0,00461	0,00195
	1	0,92879	0,77484	0,59948	0,43621	0,30034	0,19600	0,12109	0,07054	0,03852	0,01953
	2	0,99164	0,94703	0,85915	0,73820	0,60068	0,46283	0,33727	0,23179	0,14950	0,08984
	3	0,99936	0,99167	0,96607	0,91436	0,83427	0,72966	0,60889	0,48261	0,36138	0,25391
	4	0,99997	0,99911	0,99437	0,98042	0,95107	0,90119	0,82828	0,73343	0,62142	0,50000
	5	1,00000	0,99994	0,99937	0,99693	0,99001	0,97471	0,94641	0,90065	0,83418	0,74609
	6	1,00000	1,00000	0,99995	0,99969	0,99866	0,99571	0,98882	0,97497	0,95023	0,91016
	7	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998	0,99989	0,99957	0,99860	0,99620	0,99092	0,98047
	8	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998	0,99992	0,99974	0,99924	0,99805

Statistiska inst., Sthlm:s univ.

TABELL 6 forts. Binomial-fördelningen; n = 19 (forts.) och 20

n	x	p = 0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
19	9	1,00000	1,00000	0,99986	0,99842	0,99110	0,96745	0,91253	0,81391	0,67104	0,50000
	10	1,00000	1,00000	0,99998	0,99969	0,99771	0,98946	0,96531	0,91153	0,81590	0,67620
	11	1,00000	1,00000	1,00000	0,99995	0,99952	0,99718	0,98856	0,96477	0,91287	0,82036
	12	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99992	0,99938	0,99691	0,98844	0,96577	0,91647
	13	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99989	0,99933	0,99693	0,98907	0,96822
	14	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99988	0,99936	0,99724	0,99039
	15	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99990	0,99947	0,99779
	16	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99993	0,99964
	17	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99996
	18	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
20	0	0,35849	0,12158	0,03876	0,01153	0,00317	0,00080	0,00018	0,00004	0,00001	0,00000
	1	0,73584	0,39175	0,17556	0,06918	0,02431	0,00764	0,00213	0,00052	0,00011	0,00002
	2	0,92452	0,67693	0,40490	0,20608	0,09126	0,03548	0,01212	0,00361	0,00093	0,00020
	3	0,98410	0,86705	0,64773	0,41145	0,22516	0,10709	0,04438	0,01596	0,00493	0,00129
	4	0,99743	0,95683	0,82985	0,62965	0,41484	0,23751	0,11820	0,05095	0,01886	0,00591
	5	0,99967	0,98875	0,93269	0,80421	0,61717	0,41637	0,24540	0,12560	0,05533	0,02069
	6	0,99997	0,99761	0,97806	0,91331	0,78578	0,60801	0,41663	0,25001	0,12993	0,05766
	7	1,00000	0,99958	0,99408	0,96786	0,89819	0,77227	0,60103	0,41589	0,25201	0,13159
	8	1,00000	0,99994	0,99867	0,99002	0,95907	0,88667	0,76238	0,59560	0,41431	0,25172
	9	1,00000	0,99999	0,99975	0,99741	0,98614	0,95204	0,87822	0,75534	0,59136	0,41190
	10	1,00000	1,00000	0,99996	0,99944	0,99606	0,98286	0,94683	0,87248	0,75071	0,58810
	11	1,00000	1,00000	1,00000	0,99990	0,99906	0,99486	0,98042	0,94347	0,86924	0,74828
	12	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998	0,99982	0,99872	0,99398	0,97897	0,94197	0,86841
	13	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99997	0,99974	0,99848	0,99353	0,97859	0,94234
	14	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99996	0,99969	0,99839	0,99357	0,97931
	15	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99995	0,99968	0,99847	0,99409
	16	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99995	0,99972	0,99871
	17	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99996	0,99980
	18	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998
	19	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

LÖSNINGAR / STATISTIKENS GRUNDER 1 (SG1) / 29-03-2017

1

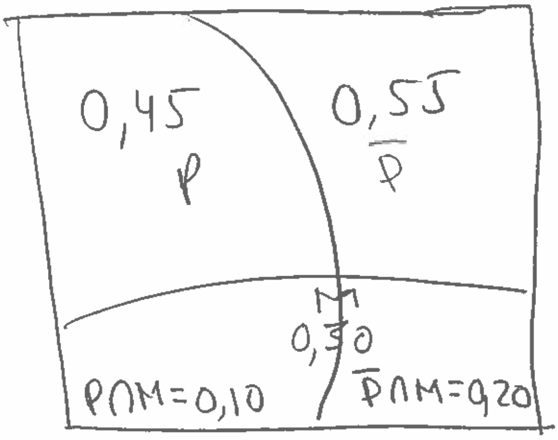
a) $0{,}03 + 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}08 + 0{,}10 + 0{,}07 = 0{,}36$

b) $\dfrac{0{,}08 + 0{,}10 + 0{,}07}{0{,}20 + 0{,}20 + 0{,}20} = \dfrac{0{,}25}{0{,}60} = 0{,}416666$

c) $= 1 - [0{,}10 + 0{,}07] = 1 - 0{,}17 = 0{,}83$

d) $0{,}04 + 0{,}06 = 0{,}10$

2



$P(P) = 0{,}45 \quad P(\bar{P}) = 0{,}55$

$P(M) = 0{,}30 \quad P(\bar{M}) = 0{,}70$

$P(P \cap M) = 0{,}10 \quad P(\bar{P} \cap M) = 0{,}20$

$P(\bar{P} \cap \bar{M}) = 0{,}35 \quad P(P \cap \bar{M}) = 0{,}35$

a) $P(P|M) = \dfrac{P(P \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0{,}10}{0{,}30} = \underline{0{,}33333}$

b) $P(\bar{P}|\bar{M}) = \dfrac{P(\bar{P} \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \dfrac{0{,}35}{0{,}70} = \underline{0{,}5}$

c) $P(M|P) = \dfrac{P(P \cap M)}{P(P)} = \dfrac{0{,}10}{0{,}45} = \underline{0{,}22222}$

d) $P(P \cap M) = \underline{0{,}10}$

③ $X \sim BIN(n=9,\ p=0{,}45)$

a) $P(X \leq 6) = \underline{0{,}95023}$

b) $P(X=6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) =$

$= 0{,}95023 - 0{,}83418 = \underline{0{,}11605}$

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) =$

$= 1 - 0{,}03852 = \underline{0{,}96148}$

d)

MINST 6 PERSONER SOM RÖSTAR PÅ P

RÖSTAR PÅ P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
INTE RÖSTAR PÅ P	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

HÖGST 3 PERSONER SOM INTE RÖSTAR PÅ P

$P\left[\text{HÖGST 3 PERSONER SOM INTE RÖSTAR PÅ P}\right] = P\left[\text{MINST 6 PERSONER SOM RÖSTAR PÅ P}\right] =$

$= P\left[X \geq 6\right] = 1 - P(X \leq 5) =$

$= 1 - 0{,}83418 = \underline{0{,}16582}$

4 a) $X \sim N(\mu = 180, \sigma = 10)$

$$P(X > 185) = 1 - P(X \leq 185) =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{185-180}{10}\right) = 1 - \Phi(0,5) =$$

$$= 1 - 0,69146 = \underbrace{0,30854}$$

b) $p = P(X < 170) = P\left(Z \leq \frac{170-180}{10}\right) = \Phi(-1) =$

$$= 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84134 = 0,15866$$

$Y \sim \text{BINOMIAL}(n = 6, p \simeq 0,15)$

$P(Y \leq 1) \simeq \underbrace{0,77648}$ (ENLIGT TABELL 6).

⑤ a) EFTERSOM $\underbrace{P(X=1, Y=20)}_{0,08} \neq \underbrace{\underbrace{P(X=1)}_{(0,20)} \cdot \underbrace{P(Y=20)}_{(0,5)}}_{0,10}$

ÄR X OCH Y $\underline{\text{BEROENDE}}$

b) $P(Y=20 \mid X=3) = \dfrac{0,30}{0,30+0,20} = \dfrac{0,30}{0,50} = \underline{0,60}$

$P(Y=30 \mid X=3) = \dfrac{0,20}{0,50} = \underline{0,40}$

c) $E(X) = 1\cdot(0,2) + 2\cdot(0,3) + 3(0,5) = \underline{2,3}$

$E(Y) = \underline{25}$

$\mathrm{COV}(X,Y) = (1)(20)\cdot(0,08) + \cdots + (3)(30)(0,20) - (2,3)(25) =$

$= 56,8 - (2,3)(25) = \underline{-0,7}$

$V(X) = 1^2\cdot(0,2) + 2^2\cdot(0,3) + 3^2\cdot(0,5) - (2,3)^2 = 5,9 - 5,29 = \underline{0,61}$

$V(Y) = 20^2\cdot(0,5) + 30^2(0,5) - 25^2 = 650 - 625 = \underline{25}$

$\mathrm{CORR}(X,Y) = \dfrac{-0,7}{\sqrt{(0,61)(25)}} = -0,1792516319$

$\approx \underline{-0,179}$

16

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 29/3-2017

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistikens grunder 1

Kurs: Statistikens grunder 15 hp (kväll)

ANONYMKOD: SGK-0036

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					3
Lär.ant. 20p	20p	20p	20p	18p					

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
98p	A	RC

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen **Anonymkod:** S/gK-0036 **Blad nr:** 1

1) 20p

1)

Y \ X	0	1	2	3	4	5	
20	0,06	0,05	0,06	0,05	0,04	0,06	0,32
30	0,04	0,03	0,05	0,07	0,06	0,07	0,32
40	0,03	0,04	0,04	0,08	0,10	0,07	0,36
	0,13	0,12	0,15	0,2	0,2	0,2	1

a) $P(Y>30) = 0,03+0,04+0,04+0,08+0,10+0,07 = 0,36$

SVAR: 0,36

R

b) Vi söker $P(Y>30 \mid X>2)$

$$P(Y>30 \mid X>2) = \frac{P(Y>30 \cap X>2)}{P(X>2)}$$

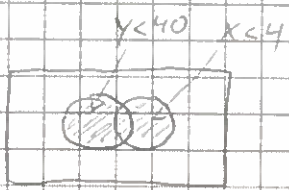
$$= \frac{0,08+0,10+0,07}{0,05+0,04+0,06+0,07+0,06+0,07+0,08+0,10+0,07}$$

$$= \frac{0,08+0,10+0,07}{0,2+0,2+0,2} = \frac{1/4}{3/5} = \frac{5}{12}$$

SVAR: $\frac{5}{12} = 0,4166$

R

c) Vi söker $P(Y<40 \cup X<4)$



$P(Y<40 \cup X<4) = 1-(0,10+0,07) = 0,83$

SVAR: 0,83

R

d) Vi söker $P(Y<30 \cap X>3)$

$P(Y<30 \cap X>3) = 0,04+0,06 = 0,10$

SVAR: 0,10

R

2

Vi börjar med att skriva upp alla olika sannolikheter för varje utfall:

2) 20p

$P(\text{Pirat}) = 0{,}45$

$P(\text{Mallorca}) = 0{,}30$

$\left(P(\text{Mallorca} \cap \text{Pirat}) = 0{,}10 \; , \; P(\text{Mallorca} \cap \overline{\text{Pirat}}) = 0{,}20 \right)$

a) $P(\text{Pirat} \mid \text{Mallorca}) = \dfrac{P(\text{Pirat} \cap \text{Mallorca})}{P(\text{Mallorca})}$

$= \dfrac{0{,}10}{0{,}30} = 1/3$

SVAR: $1/3$ R

b) $P(\overline{\text{Pirat}} \mid \overline{\text{Mallorca}}) = \dfrac{P(\overline{\text{Pirat}} \cap \overline{\text{Mallorca}})}{P(\overline{\text{Mallorca}})}$

$P(\overline{\text{Pirat}} \cap \overline{\text{Mallorca}})$

$\Rightarrow P(\overline{\text{Pirat}} \cap \overline{\text{Mallorca}}) = 1 - P(\text{Pirat}) - P(\text{Mallorca}) + P(\text{Pirat} \cap \text{Mallorca})$

Vidare vet vi att $P(\overline{\text{Mallorca}}) = 1 - P(\text{Mallorca})$

$\Rightarrow P(\overline{\text{Pirat}} \mid \overline{\text{Mallorca}}) = \dfrac{1 - 0{,}45 - 0{,}30 + 0{,}10}{1 - 0{,}30} = 1/2$

SVAR: $1/2$ R

c) $P(\text{Mallorca} \mid \text{Pirat}) = \dfrac{P(\text{Mallorca} \cap \text{Pirat})}{P(\text{Pirat})} = \dfrac{0{,}10}{0{,}45} = \dfrac{2}{9}$

SVAR: $2/9$ R

d) $P(\text{Pirat} \cap \text{Mallorca}) = 0{,}10$

SVAR: $0{,}10$ R

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnviksssalen **Anonymkod:** SGK-0036 **Blad nr:** 2

3) 20p

(3)

Binomialfördelning: $f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$

$n = 9, \quad p = 0{,}45$

a) $P(X \leq 6)$ sökes,

$P(X \leq 6)_{bin} = 1 - f(9) - f(8) - f(7) = 0{,}95023$ (enligt tabell 6)

SVAR: 0,95023

R

b) $P(X = 6)$ sökes, alltså $f(6)$:

$f(6) = \frac{9!}{6!\,3!} 0{,}45^6 \cdot 0{,}55^3 = 0{,}1160$

SVAR: 0,1160

R

c) $P(X \geq 2)$ sökes, alltså:

$P(X \geq 2) = 1 - f(0) - f(1) = 1 - \underbrace{0{,}03852}_{\text{(enligt tabell 6)}} = 0{,}96148$

SVAR: 0,96148

R

d) Högst 3 personer som inte röstar på Piratp. motsvarar minst 6 personer som röstar på piratp.

Alltså sökes $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$

$= 1 - \underbrace{0{,}83418}_{\text{(enligt tabell 6)}} = 0{,}16582$

SVAR: 0,16582

R

④ normal fördelning 4) 20p

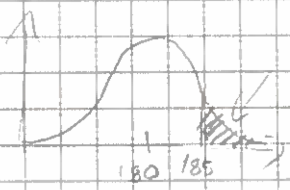
$\mu = 180$

$\sigma = 10$

X = kroppslängd, stokastisk variabel

a) $P(X > 185)$ sökes

$$P(X>185) = P\left(Z > \frac{185-180}{10}\right) = 1-\Phi(0,5)$$



$1-\Phi(0,5)$

$$1-\Phi(0,5) = 1 - \underbrace{0,69146}_{\text{(enligt tabell I)}} = 0,30854$$

SVAR: 0,30854 R

b) Vi börjar med att räkna ut sannolikheten p för att ha en kroppslängd mindre än 170 cm.

$$p = P(X<170) = P\left(Z < \frac{170-180}{10}\right) = \Phi(-1,0)$$

$$= 1-\Phi(1,0) = 1 - \underbrace{0,84134}_{\text{(enligt tabell I)}} = 0,15866$$

Nu kan vi använda en binomialfördelning för stickprovet enligt: $n = 6$, $x \leq 1$

$$P(X \leq 1) = f(0) + f(1)$$

$$f(0) = \frac{6!}{0!\,6!} \cdot 0,15866^0 \cdot (1-0,15866)^6 = 0,35467$$

$$f(1) = \frac{6!}{1!\,5!} \cdot 0,15866^1 (1-0,15866)^5 = 0,40131$$

$$\Rightarrow P(X \leq 1) = 0,35467 + 0,40131 = 0,75598$$

SVAR: 0,75598 R

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnvikssalen Anonymkod: SGK-0036 Blad nr: 3

5) 18p

(5)

		X = 1	X = 2	X = 3	
Y	20	0,08	0,12	0,30	0,50
	30	0,12	0,18	0,20	0,50
		0,20	0,30	0,50	1

a) Vi kollar om $P(x, y) = P(x) \cdot P(y)$?

Exempel: $P(X = 3, Y = 30) = 0,20$

$P(X=3) \cdot P(Y=30) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$

$0,20 \neq 0,25 \iff P(X=3, Y=30) \neq P(X=3) \cdot P(Y=30)$

$\Rightarrow$ de är INTE oberoende

SVAR: INTE oberoende

-2 p

b) För $X = 3$ får vi följande sannolikhetsfördelning:

$$P(Y=20 \mid X=3) = \frac{P(Y=20 \cap X=3)}{P(X=3)} = \frac{0,30}{0,50} = 0,6$$

R

$$P(Y=30 \mid X=3) = \frac{P(Y=30 \cap X=3)}{P(X=3)} = \frac{0,20}{0,50} = 0,4$$

R

Alltså:

		X = 3
Y	20	0,6
	30	0,4
		1

c) $$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{\sum_{x \in \Omega_x} \sum_{y \in \Omega_y} xy \, p(x, y) - \mu_x \mu_y}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

Vi börjar med att räkna ut μ_x och μ_y:

$\mu_x = 1 \cdot 0,20 + 2 \cdot 0,30 + 3 \cdot 0,50 = 2,3$ R

$\mu_y = 20 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5 = 25$ R

Sedan räknar vi ut kovariansen:

$$Cov(X,Y) = 1 \cdot 20 \cdot 0{,}08 + 2 \cdot 20 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 20 \cdot 0{,}30$$
$$+ 1 \cdot 30 \cdot 0{,}12 + 2 \cdot 30 \cdot 0{,}18 + 3 \cdot 30 \cdot 0{,}20 - 2{,}3 \cdot 25$$
$$= 20(0{,}08 + 0{,}24 + 0{,}90) + 30(0{,}12 + 0{,}36 + 0{,}60) - 57{,}5$$
$$= 20 \cdot 1{,}22 + 30 \cdot 1{,}08 - 57{,}5 = -0{,}7$$

R

Sedan räknar vi ut $V(X)$ och $V(Y)$:

$$V(X) = (1-2{,}3)^2 \cdot 0{,}2 + (2-2{,}3)^2 \cdot 0{,}3 + (3-2{,}3)^2 \cdot 0{,}5$$
$$= 0{,}338 + 0{,}027 + 0{,}245 = 0{,}61$$

R

$$V(Y) = (20-25)^2 \cdot 0{,}5 + (30-25)^2 \cdot 0{,}5 =$$
$$= 12{,}5 + 12{,}5 = 25$$

R

$\Rightarrow$ Korrelationen kan nu räknas ut till:

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{-0{,}7}{\sqrt{0{,}61 \cdot 25}} = -0{,}179$$

SVAR: $-0{,}179$

R