Stockholms universitet
Statistiska institutionen
Raul Cano

SKRIVNINGSDATUM: 09-05-2017

Skriftlig tentamen i **Statistikens grunder 1** (6 hp), ingående som moment 1 i kursen **Statistikens grunder, GN, 15 hp.**

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Miniräknare. Vidhäftade formel- och tabellblad (obs! vidhäftas endast de tabellsidor som behövs för den här tentamen).
Tentamensgenomgång och återlämning. Onsdagen den 24 maj, kl. 18.00 i B319.
Därefter kan skrivningarna hämtas på studentexpeditionen, plan 7 i B-huset.

Tentamen består av fem uppgifter som kan ge totalt 100 poäng. För betyget A gäller 90-100 p., för betyget B gäller 80-89 p., för betyget C gäller 70-79 p., för betyget D gäller 60-69 p., för betyget E gäller 50-59 p., för betyget Fx gäller 40-49 p. och för betyget F gäller 0-39 p. För detaljerade betygskriterier se kursbeskrivningen på kurshemsidan.
För full poäng på en uppgift krävs fullständiga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1: (20 poäng)
Baserade på empiriska data har Stadsförvaltning i den stora staden New York bearbetat nedanstående sannolikhetsmodell för alla anställda i staden. Modellen beskriver antal sjukdagar (X) som har tagits per år med motsvarande sannolikheter.

Antal sjukdagar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sannolikhet	0,05	0,05	0,10	0,10	0,15	0,20	0,15	0,10	0,05	0,05

Låt A vara händelsen att en slumpmässigt vald anställd tar mer än tre sjukdagar. Låt B vara den händelse att en slumpmässigt vald anställd tar mindre än åtta sjukdagar.
a). Beräkna den betingade sannolikheten för A, givet att B har inträffat. (10 poäng)

Låt C vara händelsen att en slumpmässigt vald anställd tar mindre än sex sjukdagar. Låt D vara den händelse att en slumpmässigt vald anställd tar mer än två sjukdagar.
b). Beräkna den betingade sannolikheten för C, givet att D har inträffat. (10 poäng)

Uppgift 2: (20 poäng)
I den trevliga delen Manhattan i New York finns tre skolklasser. Den första med 20 pojkar och 30 flickor. Den andra med 40 pojkar och 10 flickor. Den tredje med 25 pojkar och 25 flickor. Först väljs en klass slumpmässigt. Sedan väljs ett barn slumpmässigt från den erhållna klassen.

a). Vad är sannolikheten att det valda barnet är en flicka? (5 poäng)

b). Givet att det valda barnet var en flicka, vad är sannolikheten att den valda flickan kommer ifrån den andra klassen? (10 poäng)

c). Vad är den betingade sannolikheten att det valda barnet är en flicka, givet att den valda klassen var den första klassen? (5 poäng)

Uppgift 3: (20 poäng)
I den stora staden New York röstar 40% av alla röstberättigade personer på Clintons parti.
Man drar ett slumpmässigt stickprov på 200 röstberättigade personer.

a). Hur stor är sannolikheten att stickprovet skall innehålla 100 personer eller fler som röstar på Clintons parti? (10 poäng)
Obs. Du måste lösa uppgiften 3a) genom en lämplig normalapproximation med "kontinuitetskorrektion/halvkorrektion" (utan "kontinuitetskorrektion/halvkorrektion" blir det minus 2 poäng). Lösningen utan en normalapproximation ger 0 poäng.

b). Man drar ett slumpmässigt stickprov på 6 röstberättigade personer. Hur stor är sannolikheten att stickprovet skall innehålla mindre än tre personer som röstar på Clintons parti? (10 poäng)

Uppgift 4: (20 poäng)
I den stora staden New York betraktar Stadsförvaltning antal sjukdagar (X) som en kontinuerlig stokastisk variabel. Dessutom antar man att X är normalfördelad med väntevärde 5 dagar och standardavvikelse 2 dagar.

a). En person väljs slumpmässigt från alla anställda i staden. Hur stor är sannolikheten att personen har tagit mellan 3 och 8 sjukdagar per år? (10 poäng)

b). Man drar ett slumpmässigt stickprov på 4 personer (från alla anställda i staden). Hur stor är sannolikheten att stickprovet skall innehålla 2 personer som har tagit mindre än 7 sjukdagar per år? (10 poäng)

Uppgift 5: (20 poäng)
Stadsförvaltning (naturligtvis i den stora staden New York) undersöker om det föreligger ett samband mellan X (kön) och antal sjukdagar (Y) som har tagits per år bland alla anställda i staden.
Man föreslår följande sannolikhetsmodell för X och Y:

	y=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x = man	0,02	0,02	0,04	0,04	0,06	0,08	0,06	0,04	0,02	0,02
= kvinna	0,03	0,03	0,06	0,06	0,09	0,12	0,09	0,06	0,03	0,03

a). Enligt modellen, påvisa att kön och antal sjukdagar är beroende eller oberoende. (10 poäng)
b). Ange den betingade sannolikhetsfördelningen för Y givet att X = kvinna. (10 poäng)

FORMLER

Additionssatsen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Multiplikationssatsen: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Väntevärde för diskret s.v. X:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x \in \Omega_x} x f(x)$$

Varians för diskret s.v. X:

$$\sigma_X^2 = V(X) = E[(X - \mu_X)^2] = \sum_{x \in \Omega_x} [x - E(X)]^2 f(x)$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{x \in \Omega_x} x^2 f(x) - [E(X)]^2$$

Två diskreta s.v. X och Y med simultanfrekvensfunktion $f(x, y)$

$$f_X(x) = \sum_{y \in \Omega_Y} f(x, y) \qquad f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Kovarians och korrelation för två diskreta s.v. X och Y, ($\mu_X = E(X)$ och $\mu_Y = E(Y)$):

$$Cov(X, Y) = \sum_{x \in \Omega_x} \sum_{y \in \Omega_y} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) = \sum_{x \in \Omega_x} \sum_{y \in \Omega_y} xy f(x, y) - \mu_X \mu_Y$$

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{SD(X) \cdot SD(Y)} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

Räkneregler för väntevärden och varianser (a, b, c är konstanter och X, Y är s.v.)

$E(c) = c$	$V(c) = 0$
$E(X + c) = E(X) + c$	$V(X + c) = V(X)$
$E(aX) = aE(X)$	$V(aX) = a^2 V(X)$
$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$	$V(aX + bY + c) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab Cov(X, Y)$

Binomialfördelningen: $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} = \dfrac{n!}{x!\,(n - x)!} p^x (1 - p)^{n-x}$

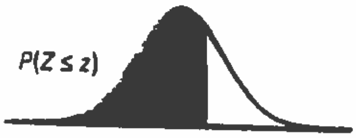
Poissonfördelningen: $f(x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

Exponentialfördelningen: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

TABELL 1. Normalfördelningen, standardiserad

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$ där $Z \in N(0, 1)$.

För negativa värden, utnyttja att $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$



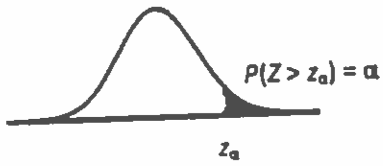
x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

TABELL 2. Normalfördelningens kvantiler, standardiserad

$Z \in N(0, 1)$. Vilket värde har z_α om $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ där α är en given sannolikhet.

Utnyttja även $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ för $P(Z \leq -z_\alpha)$.

α	x_α
0,1	1,2816
0,05	1,6449
0,025	1,9600
0,010	2,3263
0,005	2,5758
0,0025	2,8070
0,0010	3,0902
0,0005	3,2905
0,00025	3,4808
0,00010	3,7190
0,00005	3,8906
0,000025	4,0556
0,000010	4,2649
0,000005	4,4172



TABELL 6. Binomial-fördelningen; $n = 2,\dots,9$

$P(X \le x)$ där $X \in Bin(n, p)$. För $p > 0{,}5$, utnyttja att $P(X \le x) = P(Y \ge n\text{-}x)$ där $Y \in Bin(n, 1\text{-}p)$

n	x	p = 0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
2	0	0,90250	0,81000	0,72250	0,64000	0,56250	0,49000	0,42250	0,36000	0,30250	0,25000
	1	0,99750	0,99000	0,97750	0,96000	0,93750	0,91000	0,87750	0,84000	0,79750	0,75000
3	0	0,85738	0,72900	0,61413	0,51200	0,42188	0,34300	0,27463	0,21600	0,16638	0,12500
	1	0,99275	0,97200	0,93925	0,89600	0,84375	0,78400	0,71825	0,64800	0,57475	0,50000
	2	0,99988	0,99900	0,99663	0,99200	0,98438	0,97300	0,95713	0,93600	0,90888	0,87500
4	0	0,81451	0,65610	0,52201	0,40960	0,31641	0,24010	0,17851	0,12960	0,09151	0,06250
	1	0,98598	0,94770	0,89048	0,81920	0,73828	0,65170	0,56298	0,47520	0,39098	0,31250
	2	0,99952	0,99630	0,98802	0,97280	0,94922	0,91630	0,87352	0,82080	0,75852	0,68750
	3	0,99999	0,99990	0,99949	0,99840	0,99609	0,99190	0,98499	0,97440	0,95899	0,93750
5	0	0,77378	0,59049	0,44371	0,32768	0,23730	0,16807	0,11603	0,07776	0,05033	0,03125
	1	0,97741	0,91854	0,83521	0,73728	0,63281	0,52822	0,42842	0,33696	0,25622	0,18750
	2	0,99884	0,99144	0,97339	0,94208	0,89648	0,83692	0,76483	0,68256	0,59313	0,50000
	3	0,99997	0,99954	0,99777	0,99328	0,98438	0,96922	0,94598	0,91296	0,86878	0,81250
	4	1,00000	0,99999	0,99992	0,99968	0,99902	0,99757	0,99475	0,98976	0,98155	0,96875
6	0	0,73509	0,53144	0,37715	0,26214	0,17798	0,11765	0,07542	0,04666	0,02768	0,01563
	1	0,96723	0,88574	0,77648	0,65536	0,53394	0,42018	0,31908	0,23328	0,16357	0,10938
	2	0,99777	0,98415	0,95266	0,90112	0,83057	0,74431	0,64709	0,54432	0,44152	0,34375
	3	0,99991	0,99873	0,99411	0,98304	0,96240	0,92953	0,88258	0,82080	0,74474	0,65625
	4	1,00000	0,99995	0,99960	0,99840	0,99536	0,98906	0,97768	0,95904	0,93080	0,89063
	5	1,00000	1,00000	0,99999	0,99994	0,99976	0,99927	0,99816	0,99590	0,99170	0,98438
7	0	0,69834	0,47830	0,32058	0,20972	0,13348	0,08235	0,04902	0,02799	0,01522	0,00781
	1	0,95562	0,85031	0,71658	0,57672	0,44495	0,32942	0,23380	0,15863	0,10242	0,06250
	2	0,99624	0,97431	0,92623	0,85197	0,75641	0,64707	0,53228	0,41990	0,31644	0,22656
	3	0,99981	0,99727	0,98790	0,96666	0,92944	0,87396	0,80015	0,71021	0,60829	0,50000
	4	0,99999	0,99982	0,99878	0,99533	0,98712	0,97120	0,94439	0,90374	0,84707	0,77344
	5	1,00000	0,99999	0,99993	0,99963	0,99866	0,99621	0,99099	0,98116	0,96429	0,93750
	6	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99994	0,99978	0,99936	0,99836	0,99626	0,99219
8	0	0,66342	0,43047	0,27249	0,16777	0,10011	0,05765	0,03186	0,01680	0,00837	0,00391
	1	0,94276	0,81310	0,65718	0,50332	0,36708	0,25530	0,16913	0,10638	0,06318	0,03516
	2	0,99421	0,96191	0,89479	0,79692	0,67854	0,55177	0,42781	0,31539	0,22013	0,14453
	3	0,99963	0,99498	0,97865	0,94372	0,88618	0,80590	0,70640	0,59409	0,47696	0,36328
	4	0,99998	0,99957	0,99715	0,98959	0,97270	0,94203	0,89391	0,82633	0,73962	0,63672
	5	1,00000	0,99998	0,99976	0,99877	0,99577	0,98871	0,97468	0,95019	0,91154	0,85547
	6	1,00000	1,00000	0,99999	0,99992	0,99962	0,99871	0,99643	0,99148	0,98188	0,96484
	7	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998	0,99993	0,99977	0,99934	0,99832	0,99609
9	0	0,63025	0,38742	0,23162	0,13422	0,07508	0,04035	0,02071	0,01008	0,00461	0,00195
	1	0,92879	0,77484	0,59948	0,43621	0,30034	0,19600	0,12109	0,07054	0,03852	0,01953
	2	0,99164	0,94703	0,85915	0,73820	0,60068	0,46283	0,33727	0,23179	0,14950	0,08984
	3	0,99936	0,99167	0,96607	0,91436	0,83427	0,72966	0,60889	0,48261	0,36138	0,25391
	4	0,99997	0,99911	0,99437	0,98042	0,95107	0,90119	0,82828	0,73343	0,62142	0,50000
	5	1,00000	0,99994	0,99937	0,99693	0,99001	0,97471	0,94641	0,90065	0,83418	0,74609
	6	1,00000	1,00000	0,99995	0,99969	0,99866	0,99571	0,98882	0,97497	0,95023	0,91016
	7	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998	0,99989	0,99957	0,99860	0,99620	0,99092	0,98047
	8	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998	0,99992	0,99974	0,99924	0,99805

TABELL 6 forts. Binomial-fördelningen; n = 19 (forts.) och 20

n	x	p = 0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
19	9	1,00000	1,00000	0,99986	0,99842	0,99110	0,96745	0,91253	0,81391	0,67104	0,50000
	10	1,00000	1,00000	0,99998	0,99969	0,99771	0,98946	0,96531	0,91153	0,81590	0,67620
	11	1,00000	1,00000	1,00000	0,99995	0,99952	0,99718	0,98856	0,96477	0,91287	0,82036
	12	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99992	0,99938	0,99691	0,98844	0,96577	0,91647
	13	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99989	0,99933	0,99693	0,98907	0,96822
	14	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99988	0,99936	0,99724	0,99039
	15	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99990	0,99947	0,99779
	16	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99993	0,99964
	17	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99996
	18	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
20	0	0,35849	0,12158	0,03876	0,01153	0,00317	0,00080	0,00018	0,00004	0,00001	0,00000
	1	0,73584	0,39175	0,17556	0,06918	0,02431	0,00764	0,00213	0,00052	0,00011	0,00002
	2	0,92452	0,67693	0,40490	0,20608	0,09126	0,03548	0,01212	0,00361	0,00093	0,00020
	3	0,98410	0,86705	0,64773	0,41145	0,22516	0,10709	0,04438	0,01596	0,00493	0,00129
	4	0,99743	0,95683	0,82985	0,62965	0,41484	0,23751	0,11820	0,05095	0,01886	0,00591
	5	0,99967	0,98875	0,93269	0,80421	0,61717	0,41637	0,24540	0,12560	0,05533	0,02069
	6	0,99997	0,99761	0,97806	0,91331	0,78578	0,60801	0,41663	0,25001	0,12993	0,05766
	7	1,00000	0,99958	0,99408	0,96786	0,89819	0,77227	0,60103	0,41589	0,25201	0,13159
	8	1,00000	0,99994	0,99867	0,99002	0,95907	0,88667	0,76238	0,59560	0,41431	0,25172
	9	1,00000	0,99999	0,99975	0,99741	0,98614	0,95204	0,87822	0,75534	0,59136	0,41190
	10	1,00000	1,00000	0,99996	0,99944	0,99606	0,98286	0,94683	0,87248	0,75071	0,58810
	11	1,00000	1,00000	1,00000	0,99990	0,99906	0,99486	0,98042	0,94347	0,86924	0,74828
	12	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998	0,99982	0,99872	0,99398	0,97897	0,94197	0,86841
	13	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99997	0,99974	0,99848	0,99353	0,97859	0,94234
	14	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99996	0,99969	0,99839	0,99357	0,97931
	15	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99995	0,99968	0,99847	0,99409
	16	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99995	0,99972	0,99871
	17	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99999	0,99996	0,99980
	18	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998
	19	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000