STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Ellinor Fackle-Fornius

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR II
2017-11-24

Skrivtid: 10.00-15.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.
Resultatet meddelas senast den 13 december.

OBS! Glöm inte att ange nödvändiga antaganden överallt

Uppgift 1. (20 poäng)

Avgör om vart och ett av följande påståenden är sanna eller falska och motivera ditt svar.

i) När ett 95 %-igt konfidensintervall har beräknats är sannolikheten 95 % att intervallet innehåller det sanna men okända parametervärdet.

ii) En lägre konfidensgrad ger ett bredare konfidensintervall (allt annat lika).

iii) Signifikansnivån α är sannolikheten att nollhypotesen är falsk.

iv) p-värdet är alltid större än signifikansnivån.

v) Vid ett test av $H_0 : \mu = \mu_0$ mot alternativhypotesen $H_a : \mu = \mu_a$ kommer en lägre signifikansnivå innebära att testets styrka ökar.

Uppgift 2. (20 poäng)

Antalet bränder i Sverige under tidsperioden 1974-2003 visas i nedanstående tabell. Om intensiteten av bränder under tidsperioden är konstant borde observationerna vara slumpmässigt ordnade. Ett sätt att undersöka om det finns en trend i sekvensen av bränder är att testa om ordningen av positiva och negativa avvikelser från medelvärdet i sekvensen är slumpmässig. Testa detta med ett lämpligt icke-parametriskt test på signifikansnivån 0.01.

År	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
Antal	15 833	18 527	20 363	19 961	21 044	21 135	20 059	29 698	27 870	28 975
År	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Antal	30 929	32 160	32 471	34 038	42 171	23 893	33 238	31 925	31 082	36 252
År	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Antal	37 984	37 645	36 649	61 795	41 968	41 855	45 301	41 853	43 894	37 634

Uppgift 3. (20 poäng)

En tillverkare av golfutrustning är intresserad av att undersöka om ett nytt material (material A) i skaften på golfklubbor ökar golfslagens längd jämfört med det traditionella materialet (material B). Handlaren väljer slumpmässigt ut 5 personer som får använda klubbor med skaftmaterial A och 5 personer som får använda klubbor med skaftmaterial B. Varje spelare får slå 10 slag vardera och följande genomsnittliga längder uppmättes.

Material A	177	195	188	179	182
Material B	187	192	198	181	206

a) Testa med hjälp av ett lämpligt parameteriskt test om det går att påvisa någon skillnad mellan de två materialen när det gäller slaglängd. Använd signifikansnivån 5 %.

b) Antag istället att tillverkaren hade valt 5 personer som var och en hade fått använda båda sorters klubbor (med skaftmaterial A och skaftmaterial B) och att tabellens kolumner beskriver de 5 personernas resultat. Testa med hjälp av ett lämpligt parameteriskt test om det går att påvisa någon skillnad mellan de två materialen när det gäller slaglängd. Använd signifikansnivån 5 %.

c) Jämför de två sätten att lägga upp försöket i a)- och b)-uppgiften, vilket är att föredra?

Uppgift 4. (20 poäng)

Narkotikahalten i polisens beslag av narkotiskt material anylseras årligen. För att beskriva andelen narkotika av en viss typ i beslagen kan modellen

$$f(y) = \alpha y^{\alpha-1}, \quad 0 < y < 1,$$

användas. Här är y andelen narkotika och α är en parameter. Denna modell är ett specialfall av en betafördelning där den ena parametern $\beta = 1$. I ett slumpmässigt urval av 7 beslag registrerades följande andelar:

$$0.354, 0.201, 0.959, 0.205, 0.172, 0.149, 0.561.$$

a) Härled och beräkna maximum likelihood-skattningen av parametern α.

b) Härled och beräkna momentskattningen av parametern α.

Uppgift 5. (20 poäng)

En voltmeter mäter spänningen i en elektrisk apparat. Mätningen antas vara likformigt fördelad i intervallet $(\theta, \theta+1)$, där θ är den sanna men okända spänningen i apparaten. Antag att Y_1, Y_1, ..., Y_n är ett slumpmässigt urval av mätningar med voltmetern.

a) Visa att $\overline{Y}$ inte är en väntevärdesriktig estimator för θ, d.v.s. har en bias. Hur stor är biasen?

b) Bestäm MSE för $\overline{Y}$ när $\overline{Y}$ används som estimator för θ.

c) Bilda en funktion av $\overline{Y}$ som är en väntevärdesriktig estimator för θ.

d) Är estimatorn i c)-uppgiften konsistent?

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 24/11/17

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar
Kurs: Statistisk teori med tillämpningar II

ANONYMKOD: STMT2-HCU-NCZ

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					5 1
Lär.ant. 15	20	16	18	3					

72 + 4 bonus

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
76	C	

U, STATISTIK

Skrivsal: Brunn Anonymkod: STMT2-HCU-NCZ Blad nr: 2

2. Jag använder här ett runs-test för att testa:

H_0: Ordningen är slumpmässig

H_a: Så är ej fallet

Sign 0,01 ger $RR = \{|Z_{obs}| > 2,5758\}$ då testet är dubbelsidigt.

För att räkna ut om varje år har ett antal bränder som är högre eller lägre än genomsnitt räknar jag ut $\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n}$ och jämför med varje års obs värde.

$$\bar{Y} = \frac{978202}{30} = 32606,73$$

Detta ger teckenföljden:

- - - - - - - - - - - - - - - + + - + - - + + + + + + + + + + + +

Teststatistika: $Z = \frac{R - E(R)}{\sqrt{V(R)}}$ $R = 6$, $n_1 = 16$, $n_2 = 14$

$$E(R) = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 = \frac{2 \cdot 16 \cdot 14}{16+14} + 1 = 15,933$$

$$V(R) = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 14(2 \cdot 16 \cdot 14 - 16 - 14)}{(16+14)^2(16+14-1)}$$

$$= \frac{187264}{26100} = 7,175$$

$$Z = \frac{6 - 15,933}{\sqrt{7,175}} = -3,576$$

Eftersom $|Z_{obs}| > 2,5758$ så förkastar vi H_0 på signifikansnivån 0,01, ordningen antas alltså ej slumpmässig.

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunn   Anonymkod: STATZ-HCU-NCZ   Blad nr: 2

2. Jag använder här ett runs-test för att testa:

H_0: Ordningen är slumpmässig

H_a: Så är ej fallet

Sign 0,01 ger $RR = \{|Z_{obs}| > 2,5758\}$ då testet är dubbelsidigt.

För att räkna ut om varje år har ett antal bränder som är högre eller lägre än genomsnitt räknar jag ut $\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n}$ och jämför med varje års obs värde.

$$\bar{Y} = \frac{978202}{30} = 32606,73$$

Detta ger teckenföljden:

- - - - - - - - - - - - - - + + - + - - + + + + + + + + + + +

Teststatistika: $Z = \frac{R - E(R)}{\sqrt{V(R)}}$ $R = 6$, $n_1 = 16$, $n_2 = 14$

$$E(R) = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 = \frac{2 \cdot 16 \cdot 14}{16+14} + 1 = 15,933$$

$$V(R) = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 14(2 \cdot 16 \cdot 14 - 16 - 14)}{(16+14)^2(16+14-1)}$$

$$= \frac{187264}{26100} = 7,175$$

$$Z = \frac{6 - 15,933}{\sqrt{7,175}} = -3,576$$

Eftersom $|Z_{obs}| > 2,5758$ så förkastar vi H_0 på signifikansnivån 0,01, ordningen anses alltså ej slumpmässig.

GU, STATISTIK

Skrivsal: Brunn   Anonymkod: STATZ-HCU-NCZ   Blad nr: 3

3) a) På grund av slumpmässigt urval och icke-beroende både inom och mellan grupperna använder jag mig utav teststatistikan

$$T = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - D_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

för att testa $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$\alpha: 5\%$ dubbelsidigt ger

$\alpha_{0,025} = 1,96$

$RR: \{|t_{obs}| > 1,96\}$

$\bar{Y}_1 = \frac{921}{5} = 184,2 \qquad \bar{Y}_2 = \frac{964}{5} = 192,8$

$$S_1^2 = \frac{\sum Y_i^2 - n(\bar{Y})^2}{n-1} = \frac{169863 - 5 \cdot 33929,64}{4} = 53,7$$

$$S_2^2 = \frac{\sum Y_i^2 - n(\bar{Y})^2}{n-1} = \frac{186234 - 5 \cdot 37171,84}{4} = 93,7$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{4 \cdot 53,7 + 4 \cdot 93,7}{5+5-2} = 73,7$$

$$S_p = \sqrt{S_p^2} = 8,585$$

$$T = \frac{184,2 - 192,8 - 0}{8,585\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}} = \frac{-8,6}{5,4296} = -1,584$$

Svar: Eftersom $|t_{obs}| < 1,96$ så förkastar vi inte H_0. Ingen skillnad har påvisats

b) När vi nu har parvisa observationer använder vi oss av teststatistikan

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S/\sqrt{n}}$$ för att testa $H_0: \mu_D = 0$
$H_a: \mu_D \neq 0$

Dubbelsidighet ger återigen sign $\alpha = 5\%/2 \rightarrow 1{,}96$

$RR = \{|t_{obs}| > 1{,}96\}$

$D_1 = 10$ $D_2 = -3$ $D_3 = 10$ $D_4 = 2$ $D_5 = 24$

$$\bar{D} = \frac{39}{5} = 7{,}8$$

$$S^2 = \frac{\sum(D_i - \bar{D})^2}{4} = \frac{484{,}8}{4} = 121{,}2$$

$$S = \sqrt{S^2} \approx 11$$

$$T = \frac{7{,}8 - 0}{11/\sqrt{5}} = 1{,}586$$

Svar: Vi förkastar inte heller här H_0.
Vi kan inte fastställa denna data påvisa någon skillnad mellan materialen.

c) I detta fall gav resultaten ingen skillnad. Generellt vill jag dock mena, framförallt om man inte har alltför stora urval, att metod 2 är bättre. När man låter varje försöksperson testa båda materialen eliminerar man risken för att urvalen har drastiskt olika skicklighetsnivåer.
Om det i grupp ett råkar vara uteslutande amatörer och grupp två endast innehåller proffs kommer resultaten gissningsvis bli missvisande. Detta då ett proffs gissningsvis når längre med ett dåligt material än vad en nybörjare gör med ett bra material.
Alltså: parvisa observationer är att föredra.

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunn Anonymkod: STMT2-HCU-NCZ Blad nr: 4

4 a) $f(y) = \alpha y^{\alpha-1}$

Pga oberoende fy s.u.

$L(y_1, y_2 \ldots y_n | \alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha y_i^{\alpha-1}$

$\mathcal{L}(\alpha) = \ln L(\alpha) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \alpha y_i^{\alpha-1}\right) =$

$= \ln\left(\alpha^n \prod y_i^{(\alpha-1)}\right) =$

$= n \ln(\alpha) + (n\alpha - 1)\sum \ln(y_i) = n \ln(\alpha) + n\alpha \sum \ln(y_i) + \sum \ln(y_i)$

$\frac{d\mathcal{L}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} + n\sum \ln(y_i)$

Sätt derrivatan $= 0$ och lös ut α:

$n\sum \ln(y_i) = -\frac{n}{\alpha}$ $\alpha n \sum \ln(y_i) = -n$

$\alpha = \frac{-n}{n\sum \ln(y_i)} = \hat{\alpha}_{ML}$

$\sum \ln(y_i) = -8{,}512$

$\hat{\alpha}_{ML} = \frac{-n}{n \cdot -8{,}512} = \frac{-7}{7 \cdot -8{,}512} = 0{,}117$

Följdfel

b) $m_1' = \frac{\sum y_i}{n} = \bar{Y}$
$m_1' = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ $\Big\}$ $\bar{Y} = \frac{\alpha}{\alpha+1}$

$\bar{Y} = \frac{\alpha}{\alpha+1} \rightarrow (\alpha+1)\bar{Y} = \alpha \rightarrow \alpha\bar{Y} + \bar{Y} = \alpha \rightarrow$

$\rightarrow \bar{Y} = \alpha - \alpha\bar{Y} \rightarrow \bar{Y} = \alpha(1-\bar{Y}) \rightarrow \frac{\bar{Y}}{1-\bar{Y}} = \hat{\alpha}_{MOM}$

$\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = 0{,}372$

$\hat{\alpha}_{MOM} = \frac{0{,}372}{0{,}628} = 0{,}59$

, STATISTIK

krivsal: Brunn Anonymkod: STMT2-HCU-WCZ Blad nr: 5

5

a) $E(\theta) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{2\theta + 1}{2} = \theta + 1$

$\bar{Y} = \frac{\Sigma y_i}{n}$

$\theta + 1 = \frac{\Sigma y_i}{n} \Rightarrow \theta = \frac{\Sigma y_i}{n} - 1$

Svar: Biasen är -1

b) MSE för $\bar{Y} = V(\bar{Y}) = \frac{1}{n^2} \Sigma y_i + 1$

c) En MVU estimator för θ ges av $\int^{\theta+1} y f(y)\, dy$

$\int_{\theta}^{\theta+1} \bar{Y}\left(\frac{1}{2\theta+1}\right) dy = \left[\bar{Y}^{-1}\left(\frac{1}{2\theta+1}\right)\right]_{\theta}^{\theta+1} = \theta^{-1}\left(\frac{1}{2\theta+1}\right) =$

$= \frac{1}{2\theta^2 + 1}$

d) En estimator är konsistent om dess varians går mot noll när n går mot oändligheten

Denna estimator är konsistent.

1

elt . kn lle

det mcke det

konstant) med slh 0 eller 1.

ii) FALSKT. Generellt fås ett k.i. för θ som

$$\hat{\theta} \pm \text{kvantil} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$$

där kvantilen bestäms av fördelningen för $\hat{\theta}$, en lägre konfidensgrad gör att kvantilens värde minskar (tex är $z_{0.05} \approx 1.65 < z_{0.025} \approx 1.96$) vilket ger ett smalare k.i.

iii) FALSKT. $\alpha = P(\hat{\theta} \in RR \mid \theta = \theta_0)$ dvs slh att testvariabeln hamnar i förkastelseområdet givet att nollhypotesen är sann och säger inget om slh att en hypotes är sann eller falsk (θ är konstant)

det

det

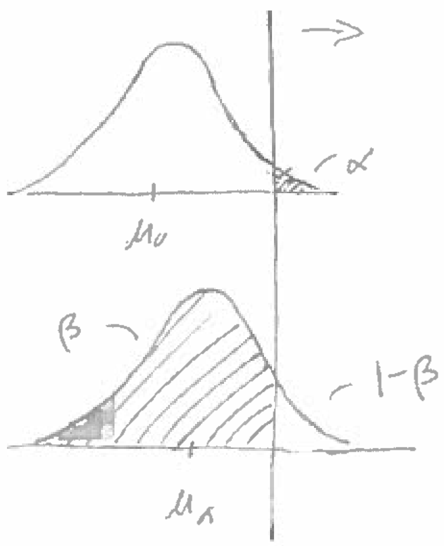
det

förkastas H_0.

v) FALSKT.

$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_a: & \mu = \mu_a \end{cases}$$

För att få lägre signifikansnivå måste det kritiska värdet (som bestämmer RR) ändras vilket medför att slh för typ II-fel (β) ökar, vilket gör att styrkan ($1-\beta$) minskar.



U

medelvärdet är rent slumpmässig

Testvariabel : R = antal runs i sekvensen

Medelvärdet av antal bränder under perioden:

$$\frac{15\,833 + 18\,527 + \ldots + 37\,634}{30} = 32\,607$$

vilket ger följande sekvens av pos. & neg. avvikelser:

$$\left.\begin{array}{cccccccccc} - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & + & + & - & + & - & - & + \\ + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \end{array}\right\} \begin{array}{l} n_1 = 16 \text{ st "}-\text{"} \\ n_2 = 14 \text{ st "}+\text{"} \\ R = 6 \end{array}$$

Då $n_1 > 10$ & $n_2 > 10$ görs en z-transformation av R vilket ger testvariabeln:

$\sqrt{V(R)}$ pprox. $N(0,1)$ om - ?n

$\{ |z| > 2.5758 \}$

:(R ' ——— $= 15.933$

$\frac{\;\cdot\, n_1 \cdot n_2 - n_1 \;)}{\;, n_2 - 1)}$ $\frac{2 \cdot 16 \cdot 14 (2 \cdot 16 \cdot 14 - 16 - 14)}{(16+14)^2 (16+14-1)}$

≈ 7.1749

it värde:

$\frac{3}{1} \approx -3.7084$

itas

vår: r is på sign.nivån 0.01 och slutsatsen

det s en trend i sekvensen av bränder

visa att ordningen av positiva och

neg r från medelvärdet är icke-

ahn

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $\iff$ $\mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$ $\quad$ $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ $\Bigg\}$ gäller både a) & b)

a) t-test, nödvändiga förutsättningar är oberoende inom grupperna (som kan antas då personerna valts ut slumpmässigt) samt oberoende mellan grupperna (som kan antas då det är 5 olika personer i varje grupp), att både $\bar{Y}_1$ och $\bar{Y}_2$ kan antas vara n-f. och att $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (så att urvalsvarianserna kan poolas)

Testvariabel:

$$T = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \text{ om } H_0 \text{ är sann}$$

R { }

{

$\bar{y}_1 = 184.2$, $\bar{y}_2 = 192.8$

$s_1^2 = 53.7$, $s_2^2 = 93.7$

$$s_p^2 = \frac{4 \cdot 53.7 + 4 \cdot 93.7}{8} = 73.7$$

obs. värde på testvariabeln:

$$t = \frac{184.2 - 192.8}{\sqrt{73.7}\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}} \approx -1.5839$$

H_0 förkastas ej då $|-1.5839| = 1.5839 \not> 2.31$

Svar: H_0 förkastas inte på signifikansnivån 0.05, det går inte att påvisa någon skillnad mellan de två materialen när det gäller slaglängd

8p.

Testvariabel:

$$T = \frac{\bar{D}}{S_d/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \text{ om } H_0 \text{ är sann}$$

$$RR = \{|t| > t_{\alpha/2}(n-1)\} = \{|t| > t_{0.025}(4)\} = \{|t| > 2.78\}$$

Material A Y_1	Material B Y_2	$D = Y_1 - Y_2$
177	187	-10
195	192	3
188	198	-10
179	181	-2
182	206	-24

$\bar{d} = -8.6$

$s_d^2 = 104.8$

$\sqrt{\cdots 015}$

H_0 förkastas ej då $|-1.8785| = 1.8785 \not> 2.78$

<u>Svar:</u> samma som i a) P.

c) I b)-uppgiften används en parvis design där samma person testar båda sorters klubbor, vilket är att föredra då variation från personer elimineras. Det betyder att variansen för den skattade skillnaden mellan medelslaglängderna reduceras i b) jmf med den icke-parvisa designen i a). (när det är pos. korr. mellan mätn. som i detta fall) 1p.

4.

Ha

$f(y) = \alpha y^{\alpha-1}$, $0 < y < 1$

a) $L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha y_i^{\alpha-1} = \alpha^n (\prod_{i=1}^{n} y_i)^{\alpha-1}$

pga iid

logaritmera: ($l(\alpha)$ och $L(\alpha)$ har max på samma ställe)

$$l(\alpha) = n \ln(\alpha) + (\alpha-1) \ln(\prod_{i=1}^{n} y_i) =$$

$$n \ln(\alpha) + (\alpha-1) \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)$$

derivera m.a.p α:

$$\frac{d\,l(\alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)$$

sätt derivatan lika med noll och lös ut α:

$$\frac{n}{\alpha} + \sum \ln(y_i) = 0$$

$\Sigma \ln(y_i)$

$\overline{\ln(y_i)}$ dvs $\underline{\underline{\hat{\alpha}_{ML}}} = \underline{\underline{-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i)}}}$

urval blir:

$\underline{\underline{\hat{\alpha}_{ML}}}$ $\frac{7}{\ln(0.354) + \ln(0.201) + \ldots + \ln(0.581)} \approx \underline{\underline{0.8224}}$

p.

metod ska uppställas så första urvalsmomentet sätts lika med första pop.momentet:

μ_1'

$\mu_1' = E(Y) = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ dvs

$\underline{\underline{\hat{\alpha}_{mom} = \frac{\bar{Y}}{1-\bar{Y}}}}$

i detta urval är $\bar{y} \approx 0.3757$:

$\underline{\underline{\hat{\alpha}_{MOM} \approx 0.5913}}$

6p.

Uppgift 5.

Y = "voltmeterns mätning"

$Y \sim Unif(\theta, \theta+1)$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ s.u. av voltmeterns mätningar

a) $E(\bar{Y}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) =$

$/ E(Y) = \frac{\theta+\theta+1}{2} = \frac{2\theta+1}{2} = \theta + 0.5 /$

$= \frac{1}{n} n(\theta+0.5) = \theta + 0.5$

$) = E(\bar{Y}) - \theta = \theta + 0.5 - \theta = 0.5$

: Biasen är 0.5

p.

$.5$ kommer att vara vvr

lå

$E(\bar{Y} - 0.5) = E(\bar{Y}) - 0.5 =$

$5 = \theta$

var: $\bar{Y} - 0.5$ är en vvr estimator för θ 5p.

$) = V(\bar{Y}) + B(\bar{Y})^2$

$$V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right) \underset{\text{pga obr.}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) =$$

$$= \frac{(\theta + 1 - \theta)^2}{12} = \frac{1}{12} / =$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{12n}$$

$$(\bar{Y}) = \frac{1}{12n} + 0.5^2 = \frac{1}{12n} + 0.25$$

.25

konsistent om

då $n \to \infty$.

$\bar{n}$

är konsistent,