STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Hans Nyquist

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I

2018-03-19

Skrivtid: 9.00-14.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.
Resultatet meddelas senast den 2 april.

OBS! Glöm inte att ange nödvändiga antaganden överallt

Uppgift 1. (20 poäng)

Värdet på en aktie bestäms av marknadens förväntningar på företaget, vilket i sin tur beror på den information om företaget som finns tillgänglig. Man vet att företaget 3F förhandlar om ett större konsultuppdrag. Man bedömer att sannolikheten att företaget får uppdraget är 0.2. Sannolikheten att värdet på företagets aktie ökar är 0.8 om man får uppdraget, men antas vara 0.1 om man inte får uppdraget. Sannolikheten att aktiens värde är oförändrad är 0.1 om man får uppdraget och 0.1 om man inte får uppdraget. Bestäm sannolikheterna att värdet på företagets aktie ökar, är oförändrad respektive minskar.

Uppgift 2. (20 poäng)

Antag att antal gånger man måste göra en tentamen på kursen Statistisk teori med tillämpningar är geometriskt fördelad med parametern p. Man vet att 91 % av studenterna klarar kursen med ett eller två tentamensförsök.

a) Bestäm parametern i fördelningen.
Ledning: p, q-formeln för lösning av andragradsekvationer: ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har lösningarna $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

b) Beräkna sannolikheten att en student får godkänt på omtentamen givet att studenten fått underkänt vid första tentamenstillfället.

c) Ett kompisgäng med fem studenter gör tentamen. Beräkna sannolikheten att minst fyra av dem får godkänt.

Uppgift 3. (20 poäng)

Diametern på en blomma för slumpmässigt valda exemplar av *ipomoea alba* kan beskrivas med en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärdet 9.5 cm och standardavvikelsen 1 cm. Man vill dela in blommorna i tre storleksklasser: liten (om blommans diameter är mindre än k_1 cm), medel (om blommans diameter är mellan k_1 och k_2 cm) samt stor (om blommans diameter är större än k_2 cm) för några konstanter k_1 och k_2.

a) Bestäm konstanterna k_1 och k_2 så att det blir lika sannolikhet att en slumpmässigt vald blomma är i storleksklassen liten, mellan respektive stor.

b) Tre blommor väljs slumpmässigt. Vad är sannolikheten att man får exakt en blomma ur varje storleksklass?

c) Antag att man vet att av blommorna i uppgift b) är minst en liten och minst en är stor. Vad är nu sannolikheten att man får en blomma ur varje storleksklass?

Uppgift 4. (20 poäng)

Förutom att studera ägnar sig studenten Stella åt att se på TV och att vara på sociala medier en viss tid varje dag. Låt Y_1 och Y_2 vara tiden i timmar under en dag som Stella tittar på TV respektive är på sociala medier. Marginaltäthetsfunktionerna för Y_1 och Y_2 är

$$f_1(y_1) = c - y_1, \quad \text{då } 0 < y_1 < 1; \text{ och 0 annars}$$
$$f_2(y_2) = c - y_2, \quad \text{då } 0 < y_2 < 1 : \text{ och 0 annars}$$

a) Bestäm konstanten c i marginalfördelningarna för Y_1 respektive Y_2.

b) Bestäm förväntad tid som Stella ser på TV.

c) Antag att man vet att Y_1 och Y_2 är stokastiskt oberoende. Bestäm den simultana täthetsfunktionen.

d) Beräkna sannolikheten att den sammanlagda tiden Stella ägnar sig åt att titta på TV och att vara på sociala medier är högst en timme.

Uppgift 5. (20 poäng)

Tiden en person i en träningsgrupp kan stå i jägarställning kan modelleras med täthetsfunktionen

$$f_Y(y) = e^{-y}, \; y > 0 \text{ och } 0 \text{ annars},$$

där Y är tiden i minuter.

a) Hur lång är förväntad tid en person i träningsgruppen kan stå i jägarställning?

b) Bestäm fördelningsfunktionen för tiden en person kan stå i jägarställning.

c) En träningsgrupp består av fem personer. Antag att de ställer sig i jägarställning samtidigt och tiderna de står i jägarställning är oberoende av varandra. Låt U vara tiden till den första måste resa sig (den kortaste tiden i jägarställning). Bestäm fördelningsfunktionen för U.

d) Hur lång är förväntad tid till den första av fem personer i träningsgruppen måste resa sig efter att ha stått i jägarställning, dvs. vad är förväntat värde av U?

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 19/3 2018

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: 0027 – TGM

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					5
Lär.ant. 20	13	20	16	12					

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
81 + 3 = 84	B	[illegible]

SU, STATISTIK

Skrivsal: ~~Bra~~ BR Anonymkod: 0027 - TGM Blad nr: 1

1) P(att företaget får uppdraget) = 0,2

P(att värdet på aktien ökar | att man får uppdraget) = 0,8

P(att värdet på aktien ökar | ej får uppdraget) = 0,1

P(att värdet oförändrat | om får uppdraget) = 0,1

P(att värdet oförändrat | om ej får uppdraget) = 0,1

A: Händelsen att värdet på aktien ökar

B: Händelsen att företaget får uppdraget

$P(B) = 0,2 \quad P(\bar{B}) = 0,8$ Söker $P(A)$

$P(A \mid B) = 0,8$ $P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid \bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

$P(A \mid \bar{B}) = 0,1$ $P(A) = 0,8 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,24$

Sannolikheten att värdet på företagets aktie ökar är alltså 0,24

C: Händelsen att värdet på aktien är oförändrad

B: Händelsen att företaget får uppdraget

$P(B) = 0,2 \quad P(\bar{B}) = 0,8$ Söker $P(C)$

$P(C \mid B) = 0,1$ $P(C) = P(C \mid B) \cdot P(B) + P(C \mid \bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

$P(C \mid \bar{B}) = 0,1$ $P(C) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,1$

Sannolikheten att värdet på företagets aktie är oförändrad är alltså 0,1

D: Händelsen att värdet på aktien minskar Söker $P(D)$

B: Händelsen att företaget får uppdraget $P(D) = P(D \mid B) \cdot P(B) + P(D \mid \bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

$P(B) = 0,2 \quad P(\bar{B}) = 0,8$ $P(D) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,8 = 0,66$

$P(D \mid B) = 1 - P(A \mid B) - P(C \mid B) = 1 - 0,8 - 0,1 = 0,1$

$P(D \mid \bar{B}) = 1 - P(A \mid \bar{B}) - P(C \mid \bar{B}) = 1 - 0,1 - 0,1 = 0,8$

5

Vid den sista beräkningen får jag fram att sannolikheten för att företagets aktie minskar blir 0,66.
Denna beräkning var lite onödigt krångligt gjord men jag var nyfiken.
Enklaste sättet att räkna ut $P(D)$ (minskar) hade varit att ta $1 - P(A) - P(B)$ vilket även det blir 0,66 $(1 - 0{,}24 - 0{,}10 = 0{,}66)$

Svar: Sannolikheten att värdet på företagets aktie ökar, är oförändrad respektive minskar är 0,24, 0,10 respektive 0,66.

2q

SU, STATISTIK

Skrivsal: BR   Anonymkod: 0027-TGM   Blad nr: 2

2)   Y = antal tentor en student behöver göra för att få godkänt

$Y \sim Ge\left(\frac{1}{p}, \frac{1-p}{p^2}\right)$

$P(y=1) + P(Y=2) = 0{,}91$

$p(y) = p(1-p)^{y-1}$

a) Jag minns tyvärr inte hur man beräknar andragradsekvationer...
Det känns trist att inte kunna fortsätta med uppgiften...
Därför hittar jag på att parametern $p = 0{,}55$

b) $P(Y=2 \mid y>1) = \frac{P(Y=2) \cap P(Y>1)}{P(Y>1)} = \frac{P(Y=2)}{P(Y>1)}$

$P(Y=2) = 0{,}55(1-0{,}55)^{2-1} = 0{,}55 \cdot 0{,}45^1 = 0{,}2475$

$P(Y>1) = 1 - P(Y=1) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$

$P(Y=2 \mid Y>1) = \frac{P(Y=2)}{P(Y>1)} = \frac{0{,}2475}{0{,}45} = 0{,}55$ Följdfel

6

Svar: Sannolikheten att en student får godkänt på omtentamen givet att studenten fått underkänt vid första tentamenstillfället är 0,55

c) Z = antal studenter

$Z \sim Bin(n=5, \; p=0{,}55)$

söker: $P(Z \geq 4) = P(Z=4) + P(Z=5)$

Följdfel

$P(Z=4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}55^4 \cdot (1-0{,}55)^1 = 5 \cdot 0{,}55^4 \cdot 0{,}45 = 0{,}205889$

7

$P(Z=5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}55^5 \cdot (1-0{,}55)^0 = 1 \cdot 0{,}55^5 \cdot 1 = 0{,}050328$

$P(Z=4) + P(Z=5) = 0{,}205889 + 0{,}050328 \approx 0{,}2562$

13p

Svar: Sannolikheten att minst fyra av de fem studenterna får godkänt är 0,2562

SU, STATISTIK

Skrivsal: BR   Anonymkod: 0027-TGM   Blad nr: 3

3) $Y \sim N(\mu = 9{,}5, \sigma = 1)$ Y = Diametern på en blomma

a) Sannolikheten ska vara lika stor mellan de tre storleksklasserna

$\rightarrow p = \frac{1}{3} = 0{,}3333$ $1 - 0{,}3333 = 0{,}6666 \rightarrow$ kolla i tabell efter ett värde nära detta

k_1?, k_2? $\rightarrow y_1 = ?$ $y_2 = ?$

hittar $p = 0{,}6664$

$z = 0{,}43$

$z = \frac{Y - \mu}{\sigma}$ sökt y

$k_2 \Rightarrow y = z \cdot \sigma + \mu = 0{,}43 \cdot 1 + 9{,}5 = 9{,}93$ cm

$9{,}93 \text{ cm} - 9{,}5 \text{ cm} = 0{,}43$ cm

$k_1 \Rightarrow 9{,}5 - 0{,}43 = 9{,}07$ cm

Storleksklasserna blir:

Liten ($Y < 9{,}07$

Mellan ($9{,}07 \leq Y \leq 9{,}93$)

Stor ($Y > 9{,}93$

Svar: $k_1 = 9{,}07$ cm
$k_2 = 9{,}93$

2

b) X = antal blommor per klass

$X \sim$ Multinomial ($p_1 = 0{,}333$, $p_2 = 0{,}333$, $p_3 = 0{,}333$

$p(1,1,1) = \frac{3!}{1!1!1!} \cdot 0{,}333^1 \cdot 0{,}333^1 \cdot 0{,}333^1 \approx 0{,}222$

R

Svar: Sannolikheten att man får exakt en blomma ur varje storleksklass är ca 0,222

20p

c) Om vi vet att minst en av de tre blommorna är liten och att minst en av de tre blommorna är stor så är det bara en av tre blommor kvar som vi inte vet vilken storlek det blir. För att få en blomma ur varje storleksklass behöver den tredje blomman vara av storleken medel. Eftersom det finns tre storleksklasser att välja på så är det en tredjedels chans att den tredje blomman är medelstor. $p = \frac{1}{3}$

R

Svar: Sannolikheten att nu få en blomma ur varje klass är ca 0,333

SU, STATISTIK

Skrivsal: BR **Anonymkod:** 0027-TGM **Blad nr:** 4

4) Y_1 = Tiden i timmar som Stella tittar på TV
Y_2 = Tiden i timmar som Stella är på sociala medier

Marginaltäthetsfunktionerna för Y_1 & Y_2:

a)
$$\int_0^1 c - y\, dy \qquad f_1(y_1) = c - y_1 \quad , \quad 0 < y_1 < 1$$
$$f_2(y_2) = c - y_2 \qquad 0 < y_2 < 1$$

$$= \left[cy - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = c \cdot 1 - \frac{1^2}{2} = c - \frac{1}{2} \qquad c - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow c = 1{,}5$$

R

5

Svar: $c = 1.5$ i båda marginalfördelningarna Y_1 och Y_2

b)
$$F(y_1) = \int_0^{y_1} 1{,}5 - t\, dt = \left[1{,}5t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{y_1} = 1{,}5y_1 - \frac{y_1^2}{2} \;; \quad 0 < y_1 < 1$$

$$F(y_2) = \int_0^{y_2} 1{,}5 - t\, dt = \left[1{,}5t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{y_2} = 1{,}5y_2 - \frac{y_2^2}{2} \;; \quad 0 < y_2 < 1$$

$$E(Y_1) = \int_0^1 y_1 \cdot f_1(y_1)\, dy_1 = \int_0^1 y_1 (1{,}5 - y_1)\, dy_1 = \int_0^1 1{,}5y_1 - y_1^2\, dy_1 = \left[\frac{1{,}5y_1^2}{2} - \frac{y_1^3}{3}\right]_0^1$$

R

$$= 0{,}75 - \frac{1}{3} = 0{,}4166$$ Svar: Förväntad tid som Stella ser på TV är 0,4166 h

4

c) Vid stokastiskt oberoende gäller $f_1(y_1) \cdot f_2(y_2) = f(y_1, y_2)$

$$(c - y_1) \cdot (c - y_2) =$$
$$(1{,}5 - y_1) \cdot (1{,}5 - y_2) = 1{,}5 \cdot 1{,}5 - 1{,}5y_2 - 1{,}5y_1 + y_1 y_2 = 2{,}25 - 1{,}5y_2 - 1{,}5y_1 + y_1 y_2$$

Detta ger $f(y_1, y_2) = 2{,}25 - 1{,}5y_2 - 1{,}5y_1 + y_1 y_2$

3

R

Svar: Den simultana täthetsfunktionen är
$$f(y_1, y_2) = 2{,}25 - 1{,}5y_2 - 1{,}5y_1 + y_1 y_2$$

d) Nu söker vi sannolikheten att den sammanlagda tiden Stella ägnar sig åt att titta på TV och att vara på sociala medier är högst en timme

Vi söker alltså $P(Y_1 + Y_2 \le 1) = P(Y_1 \le 1 - Y_2)$

$$\int_{y_2=0}^{y_2=1} \int_{y_1=0}^{y_1=1-y_2} f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2$$

2 4

$$\int_{y_2=0}^{y_2=1} \int_{y_1=0}^{y_1=1-y_2} 2{,}25 - 1{,}5y_2 - 1{,}5y_1 + y_1y_2 \; dy_1\, dy_2$$

Steg 1

Inre derivata

$$\int_{y_1=0}^{y_1=1-y_2} 2{,}25 - 1{,}5y_2 - 1{,}5y_1 + y_1 y_2 \; dy_1 = \left[2{,}25y_1 - 1{,}5y_2y_1 - \frac{1{,}5y_1^2}{2} + \frac{y_1^2 y_2}{2} \right]_0^{1-y_2}$$

1,5p

$$2{,}25(1-y_2) - 1{,}5y_2(1-y_2) - \frac{1{,}5(1-y_2)^2}{2} + \frac{(1-y_2)^2 y_2}{2} - 0$$

Det blir väldigt lång beräkning och det känns som att jag troligen har gjort något fel längs vägen. Jag hinner tyvärr inte laborera och göra om.

För att visa tankesättet vid beräkning av dubbelintegraler kan vi hitta på att vi ur Steg 1 får fram talet Z, då sätter vi sedan in Z i den yttre integralen

Steg 2

$$\int_{y_2=0}^{y_2=1} Z \, dy_2$$

SU, STATISTIK

Skrivsal: BR Anonymkod: 0027 - TGM Blad nr: 5

5)

$E(Y) \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\, dy$

Y = Tiden i minuter

$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

a)

$E(Y) \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy = \left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = -e^{-\infty} - (-e^{-0}) = 0 - (-1) = 1$ R 4

Svar: Förväntad tid en person i träningsgruppen kan stå i plankaställning är 1 min.

b) $F(y) = \int_0^y e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^y = -e^{-y} - (-e^{-0}) = -e^{-y} - (-1) = -e^{-y} + 1$

R 4

Svar: $F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{annars} \end{cases}$

c) 5 personer

U = tiden den första måste resa sig, min

$Y_{(1)}(y) = 1 - [1 - F_Y(y)]^n = 1 - \left[1 - (1 - e^{-y})\right]^5$

Svar: $F(U) = 1 - \left[1 - (1 - e^{-y})\right]^5 = \text{---}$ (-4) 4

12 p