STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Jessica Franzén

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I
2018-11-05

Skrivtid: 10.00-15.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1. (20 poäng)
a) Är det troligt att följande slumpmässiga urval kommer från en Geometrisk fördelning med $p = \frac{1}{4}$? Förklara varför eller varför inte.

2	8	1	2	2	5	1	2	8	3
5	4	2	4	7	2	2	8	4	7
2	6	2	3	5	1	3	3	2	5
4	2	2	3	6	3	6	4	9	3
3	7	5	1	3	4	3	4	6	2

b) En underjordisk militärinstallation är skyddad och befäst till den grad att den klarar av upp till tre träffar från missiler och fortfarande fungerar. Antag att sannolikheten är 0.30 att en fiende som avfyrar en missil mot målet också träffar målet d.v.s. militärinstallationen. Vad är sannolikheten att den underjordiska militärinstallationen blir förstörd av den av fienden sjunde avfyrade missilen?

Uppgift 2. (20 poäng)
En livsmedelsbutik förlorar pengar i så kallat svinn, som bland annat orsakas av varor som måste kasseras, felmärkningar och snatterier. Svinnet som procent av omsättningen (Y) modelleras som en stokastisk variabel med följande fördelningsfunktion

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \ln(y), & 1 \leq y \leq e \\ 1, & y > e. \end{cases}$$

a) Vad är sannolikheten att svinnet uppgår till mer än 2 procent av omsättningen?

b) Bestäm täthetsfunktionen för Y.

c) Beräkna väntevärdet för Y.

d) Beräkna medianen för Y.

Uppgift 3. (20 poäng)
Antal patienter med brusten aorta som kommer till en viss akutmottagning kan modelleras med en Poissonfördelning. Man vet att sannolikheten att det inte kommer någon patient med brusten aorta under en vecka är 0.90.

a) Bestäm parametern i fördelningen för antal inkomna patienter under en vecka med brusten aorta.

b) Beräkna sannolikheten att fler än en patient med brusten aorta kommer till akutmottagningen under en vecka.

c) Beräkna sannolikheten att ingen patient med brusten aorta kommer till akutmottagningen under exakt fyra av fem slumpmässigt valda veckor.

d) Beräkna sannolikheten att det kommer fler än en patient med brusten aorta till akutmottagningen under en vecka, givet att det kommer minst en.

Uppgift 4. (20 poäng)
Antag att vi har ett elektriskt värmeelement. Effekten på elementet (U) bestäms av spänningen i volt (Y) enligt sambandet

$$U = \frac{Y^2}{50}.$$

Olika belastningar på elnätet gör att spänningen varierar. Därför kan spänningen till elementet (Y) betraktas som en slumpmässig variabel som är likformigt fördelad i intervallet 210-230 volt. Bestäm täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen för effekten.

Uppgift 5. (20 poäng)
Adinas månadslön är helt provisionsbaserad och är maximalt 30 000 kronor/månad (efter skatt). En del av månadslönen sätter hon in på ett sparkonto. Låt Y_1 vara Adinas månadslön i tiotusentals kronor (efter skatt) och låt Y_2 vara insättningen på sparkontot i tiotusentals kronor. Antag att Y_1 och Y_2 har simultan täthetsfunktion

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{y_1}{9}, & 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 3 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm marginalfördelningarna för Y_1 och Y_2.

b) Bestäm den betingade täthetsfunktionen för Y_2 givet $Y_1 = y_1$.

c) Beräkna sannolikheten att insättningen på sparkontot blir större än 5000 kronor givet att månadslönen är 25000 kronor (efter skatt).

d) Beräkna sannolikheten att insättningen på sparkontot blir mindre än en fjärdedel av månadslönen (efter skatt).

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 5/11/18

Sal: Ugglevikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar
Kurs: Statistisk teori med tillämpningar I

ANONYMKOD: 0019-WRF

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					5
Lär.ant. 15	20	20	15	7					

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
77+1=78	C	GF

SU, STATISTIK

Skrivsal: ugglevivssalen Anonymkod: 0019-KRF Blad nr: 1

Uppgift 1

a) För att ett set av värden ska följa en geometrisk fördelning måste medelvärdet av alla värden ges utav $\frac{1}{p}$

i detta fall borde genomsnittsvärdet vara $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

manuell beräkning ger

$$\left.\begin{array}{l}\sum \text{nummer} = 191 \\ n = 50\end{array}\right\} \text{genomsnitt} = \frac{\sum \text{nummer}}{n} = \frac{191}{50} \approx 3.82$$

Det är således **inte** troligt att urvalen kommer från en geometrisk fördelning

Med avseende på medelvärdet skulle det kunna vara från en Geometrisk förd. Det är ett stickprov och att få exakt 4 han vi ej förvänta oss.

5

b) Negativ Binomial fördelning

$Y \sim \text{NegBin}(7, 4, 0.3)$

Y = antal avfyrade missiler

r = antal träffar som krävs för att förstöra installationen

p = Slh att träffa målet

q = Slh att missa målet

$$P(Y=7) = \binom{7-1}{4-1} \cdot 0.3^4 \cdot (0.7)^3 = \binom{6}{3} \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^3 \approx 0.056$$

Sannolikheten är ungefär 5.6 %

10

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen Anonymkod: 0019-WRF Blad nr: 2

Uppgift 2

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \ln(y), & 1 \leq y \leq e \\ 1, & y > e \end{cases}$$

ges utav $(\ln(2))$ eftersom $1 \leq 2 \leq e$

a) $P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \ln(2) \approx 0.3069$

Sannolikheten är ungf 30.69 %

5

b)

1. $\frac{d}{dy} 0 = 0$ för $y < 1$

2. $\frac{d}{dy} \ln(y) = \frac{1}{y}$ för $1 \leq y \leq e$

3. $\frac{d}{dy} 1 = 0$ för $y > e$

Täthetsfunktionen ges av

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 1 \leq y \leq e \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

5

c) $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)\,dy$, $[\infty, -\infty]$ ges utav $[e, 1]$

$$E(Y) = Y \int_1^e f(y)\,dy = \int_1^e Y \cdot \frac{1}{Y} = \int_1^e 1 = [Y]_1^e = e - 1 \approx 1.7183$$

5

d) median ges utav $\emptyset_{0.5}$

$$\int_0^{\emptyset_{0.5}} f(y)\,dy = 0.5 \Rightarrow \int_0^{\emptyset_{0.5}} \frac{1}{Y} = [\ln(Y)]_0^{\emptyset_{0.5}} = \ln(\emptyset_{0.5}) - \ln(0) = \ln(\emptyset_{0.5})$$

$$\ln(\emptyset_{0.5}) = 0.5 \Rightarrow e^{\ln(\emptyset_{0.5})} = e^{0.5} \Rightarrow \emptyset_{0.5} = e^{0.5}$$

Medianen är $e^{0.5} \approx 1.6487$

5

SU, STATISTIK

Skrivsal: ugglevikssalen Anonymkod: 0019-WRF Blad nr: 3

Uppgift 3

Poissonfördelning Parametern ges utav λ

$\lambda = ?$

$P(Y=0) = 0.9$

a) $P(Y=0) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{y!} = 0.9 \rightarrow \frac{1 \cdot e^{-\lambda}}{1} = 0.9 \rightarrow e^{-\lambda} = 0.9 \rightarrow$

$\rightarrow -\lambda \ln(e) = \ln(0.9) \rightarrow -\lambda = \ln(0.9) \rightarrow \lambda = -\ln(0.9)$

Parametern är $\lambda = -\ln(0.9)$

5

b) $P(Y>1) = 1 - P(Y\leq 1) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) \rightarrow$

$\rightarrow 1 - \left(\frac{(-\ln(0.9))^0 \cdot e^{-(-\ln(0.9))}}{0!}\right) - \left(\frac{(-\ln(0.9))^1 \cdot e^{-(-\ln(0.9))}}{1!}\right) = 1 - 0.9 - 0.0948$

≈ 0.005176

5

Det finns en 0.5176 % Sannolikhet att det kommer in fler än 1 patient med en brusten aorta

c) W = Antal veckor då ingen brusten aorta kommer in

$W \sim Bin(n=5, p=0.9)$

$P(Y=4) = \binom{5}{4}(0.9)^4 (0.1)^1 = 5 \cdot 0.9^4 \cdot 0.1 = 0.32805$

5

Sannolikheten är 0,32,805 ~~%~~

d) $P(Y>1 \mid P\geq 1) = \frac{P(Y>1 \cap P\geq 1)}{P(Y\geq 1)} = \frac{P(Y>1)}{P(Y\geq 1)}$

$\left.\begin{array}{l} P(Y>1) = 0.005176 \text{ [från b)]} \\ P(Y\geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0.9 = 0.1 \end{array}\right\} \frac{P(Y>1)}{P(Y\geq 1)} = \frac{0.005176}{0.1} =$

$0.05176 \rightarrow$ Sannolikheten är ungf ~~5.176 %~~

0,052

5

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen **Anonymkod:** 0019-WRF **Blad nr:** 4

Uppgift 4

Y = "Spänningen i volt"

$U = \frac{Y^2}{5c}$

Y är likformigt fördelad så att

$f(y) = \frac{1}{23c - 21c} = \frac{1}{2c}$ för $21c \leq y \leq 23c$

Fördelningen fås genom

$P(U \leq u) = P\left(\frac{Y^2}{5c} \leq u\right) = P(Y \leq \sqrt{5cu})$

$\int_{21c}^{\sqrt{5cu}} f(y)\,dy = \int_{21c}^{\sqrt{5cu}} \frac{1}{2c}\,dy = \left[\frac{Y}{2c}\right]_{21c}^{\sqrt{5cu}} = \frac{\sqrt{5cu}}{2c} - \frac{21}{2}$

$F(y) = \begin{cases} 0, & \cancel{y < 21c} \\ \frac{\sqrt{5cu}}{2c} - \frac{21}{2}, & 21c \cancel{\leq y} \leq 23c \\ 1, & y > \cancel{23c} \end{cases}$

Täthetsfunktion fås genom

$\frac{d}{du}\left[\frac{\sqrt{5cu}}{2c} - \frac{21}{2}\right] = \frac{5cu(5cu)^{-\frac{1}{2}}}{2 \cdot 2c} = \frac{5c}{4c(5cu)^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{4\sqrt{5cu}}$

$f(y) = \begin{cases} \frac{5}{4\sqrt{5cu}}, & 21c \leq \cancel{y \leq 23c} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

15

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen **Anonymkod:** 0019-WRF **Blad nr:** 5

Uppgift 5

Y_1 = "månadslön i tiotusentals kronor"

Y_2 = "insättningen i tiotusentals kronor"

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{y_1}{9}, & 0 \le y_2 \le y_1 \le 3 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

a) Margfördelning för Y_1 ges av

$$f(Y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\, dy_2$$

$$f(Y_1) = \int_{\cancel{y_2}}^{\cancel{3}} \frac{y_1}{9}\, dy_2 = \left[\frac{Y_1 Y_2}{9}\right]_{y_2}^{3} = \frac{3Y_2}{9} - \frac{Y_2^2}{9}$$ ✓

4

Margförd för Y_2 ges av

$$f(Y_2) = \int_{\cancel{0}}^{y_1} \frac{y_1}{9}\, dy_1 = \left[\frac{y_1^2}{18}\right]_{0}^{y_1} = \frac{Y_1^2}{18}$$ ✓

b) Betingad täthet för Y_2 givet Y_1

$$f(Y_2 | Y_1) = \frac{f(y_1, y_2)}{f(y_1)}$$

$$f(Y_2 | Y_1) = \frac{\frac{y_1}{9}}{\frac{3Y_2 - Y_2^2}{9}} = \frac{Y_1}{3Y_2 - Y_2^2}$$

felaktigt 3

c)

0

d)

0