STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Jessica Franzén

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I
2020-02-18

Skrivtid: 09.00-14.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1 (20 poäng)
Fastighetsmäklaren Maria säljer bara lägenheter. Maria har följande simultana fördelning av antal sålda objekt och antal nya objekt som hon får in per vecka:

		Antal sålda objekt		
		0	1	2
Antal nya objekt	0	$9c$	0.20	0.01
	1	0.1	0.29	0.23
	2	0.01	c	0.06

a) Bestäm konstanten c.

b) Beräkna väntevärdet för antal sålda objekt respektive antal nya objekt per vecka.

c) Beräkna korrelationen mellan antal nya objekt och antal sålda objekt per vecka.

d) Bestäm $F(1,1)$.

Uppgift 2 (20 poäng)
Marion arbetar på samma fastighetsbyrå som Maria och säljer bara stora hus. Antal sålda objekt som Marion säljer per vecka är en Poissonfördelad stokastiskt variabel X.

a) Om $P(X=1)=3P(X=2)$, bestäm värdet på parametern λ.

b) Vad är sannolikheten att Marion under de kommande fyra veckorna säljer fler än 4 objekt? (Har du inte löst a),. sätt ett godtyckligt värde på λ).

c) Vad är sannolikheten att Marion under 3 av 12 oberoende fyraveckors-perioder säljer fler än 4 objekt?

d) Korrelationen mellan antal sålda objekt för Maria och antalet sålda objekt för Marion per vecka är 0.37. Vad är förväntat antal objekt som Maria och Marion säljer tillsammans under en vecka? Vad är variansen av antalet sålda objekt som Maria och Marion säljer tillsammans per vecka?

Uppgift 3 (20 poäng)
Täthetsfunktionen för den stokastiska variabeln Y ges av

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{3}, & 0 < y < 1 \\ \frac{\sqrt{y}}{6}, & 1 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

a) Bestäm fördelningsfunktionen för Y.

b) Beräkna $P(Y < 0.5)$.

c) Beräkna $P(0.8 < Y < 2)$.

d) Beräkna $E(Y)$.

Uppgift 4 (20 poäng)
Frank arbetar med att sälja finansprodukter. För detta får Frank en grundlön om 20 000 kr/mån samt en provision vars storlek beror på hur han lyckas med försäljningen. Provisionen kan modelleras som en stokastisk variabel som har en likformig fördelning i intervallet $[0; 45000]$ kronor.

a) Frank vill nu uttrycka sin totala lön (grundlön plus provision) i US dollar, d.v.s. ange täthetsfunktionen för den totala lönen uttryckt i dollar. Använd växelkursen: 1 US Dollar = 9.70 kronor.

b) Alla anställda på säljavdelningen där Frank arbetar har en provision baserad på hur mycket personen säljer. Provisionen för varje anställd kan modelleras som ovan d.v.s. som en stokastisk variabel med likformig fördelning i intervallet $[0;\ 45\ 000]$. De anställdas bonusar antas vara oberoende. Vad är täthetsfunktionen för den högsta bonusen i ett slumpmässigt urval av 5 anställda?

Uppgift 5 (20 poäng)
För körning av en avancerad algoritm används parallell programmering. Två processorer arbetar parallellt med att exekvera algoritmen så snabbt som möjligt. X är tiden det tar i sekunder för den första processorn att exekvera sin del av algoritmen och Y är tiden det tar i sekunder för den andra processorn att exekvera sin del av algoritmen. X och Y har simultan täthetsfunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0, \quad y > 0 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm marginalfördelningarna för X och Y.

b) Är X och Y stokastiskt oberoende?

c) Beräkna mediantiden för den första processorn att exekvera sin del av algoritmen.

Stockholms universitet

Statistiska institutionen

Rättningsblad

Datum: 200218

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: 0030-HXJ

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					6
Lär.ant. 20	20	15	10	20					

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
85+5=90	A	JF

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviksalen **Anonymkod:** 0030-HXJ **Blad nr:** 1

1

Y: Antal Sålda Objekt; X: Antal nya Objekt

X \ Y	0	1	2	Σ
0	9c	0,2	0,01	
1	0,1	0,29	0,23	0,62
2	0,01	c	0,06	
Σ			0,3	1

$9c + 0,1 + 0,01 = 9c + 0,11$

$0,2 + 0,29 + c = c + 0,49$

Summan av alla marginalfördelningen av Y ska bli ett.

$(9c + 0,11) + (c + 0,49) + 0,3 = 1$

$10c + 0,9 = 1 \Rightarrow 10c = 0,1$

a) $c = \frac{0,1}{10} = 0,01$

Svar: Konstanten c har sannolikheten 0,01

3

b)

Y: Antal Sålda Objekt; X: Antal nya Objekt

X \ Y	0	1	2	Σ
0	0,09	0,2	0,01	0,3
1	0,1	0,29	0,23	0,62
2	0,01	0,01	0,06	0,08
Σ	0,2	0,5	0,3	1

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p(x_i) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,62 + 2 \cdot 0,08$

$E(X) = 0,78$

$E(Y) = \sum_{i=1}^{3} y_i \cdot p(y_i) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3 = 1,1$

$E(Y) = 1,1$

4

Svar: Väntevärdet för antalet sålda objekt resp. nya objekt per vecka är 1,1 resp. 0,78

c) $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ Beräknar först standardavvikelsen: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\sigma_X^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \Rightarrow E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot p(x_i) = 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,62 + 2^2 \cdot 0,08$

$E(X^2) = 0,62 + 0,32 = 0,94$ $V(X) = 0,94 - 0,78^2 = 0,3316$ $\sigma_X = \sqrt{0,3316} \approx 0,5758$

$\sigma_Y^2 = V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 \Rightarrow E(Y^2) = \sum_{i=1}^{3} y_i^2 \cdot p(y_i) = 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,3$

$E(Y^2) = 0,5 + 1,2 = 1,7$ $V(Y) = 1,7 - 1,1^2 = 0,49$ $\sigma_Y = \sqrt{0,49} = 0,7$

$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$ $E(XY) = \sum_{\text{alla } x} \sum_{\text{alla } y} x \cdot y \cdot p(x,y)$

$0 \cdot 0 \cdot 0,09 + 0 \cdot 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 2 \cdot 0,01 + 1 \cdot 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 1 \cdot 0,29 + 1 \cdot 2 \cdot 0,23 + 2 \cdot 0 \cdot 0,01$
$2 \cdot 1 \cdot 0,01 + 2 \cdot 2 \cdot 0,06 = 0,29 + 0,46 + 0,02 + 0,24 = 1,01$

10

$Cov(X,Y) = 1,01 - 0,78 \cdot 1,1 = 1,01 - 0,858 = 0,152$

$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{0,152}{0,5758 \cdot 0,7} \approx 0,37711$

Svar: Korrelationen mellan antalet sålda resp. antal nya objekt per vecka är ca 0,38

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: 0030-HXJ Blad nr: 2

1 forts.

d) $F(1,1) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = P(0,0) + P(0,1) + P(1,0) + P(1,1) =$
$0,09 + 0,2 + 0,1 + 0,29 = 0,68$

Svar: Sannolikheten att hon får högst ett objekt och säljer högst ett objekt per vecka är 0,68

3

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen **Anonymkod:** 0030-HXJ **Blad nr:** 3

2

$Y \sim Po(\lambda = ?)$ $\quad P(X=1) = 3 \cdot P(X=2)$

$P(X) = \dfrac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \Rightarrow P(X=1) = \dfrac{\lambda^1 \cdot e^{-\lambda}}{1!} = \dfrac{\lambda}{e^{\lambda}} \quad P(x=2) = \dfrac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!}$

a) $\lambda^1 \cdot e^{-\lambda} = 3\left(\dfrac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2}\right) \Rightarrow \lambda^1 \cdot e^{-\lambda} = \dfrac{3(\lambda^2 \cdot e^{-\lambda})}{2} \Rightarrow e^{-\lambda} = \dfrac{\dfrac{3(\lambda^2 \cdot e^{-\lambda})}{2}}{\dfrac{\lambda}{1}}$

$e^{-\lambda} = 3 \cdot \dfrac{(\lambda^2 \cdot e^{-\lambda})}{2 \cdot \lambda} \Rightarrow \dfrac{e^{-\lambda}}{3} = \dfrac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2 \cdot \lambda} \Rightarrow \dfrac{e^{-\lambda}}{3} = \dfrac{\lambda^2}{\lambda} \cdot \dfrac{e^{-\lambda}}{2}$

$\dfrac{e^{-\lambda}}{3} = \lambda \cdot \dfrac{e^{-\lambda}}{2} \Rightarrow \dfrac{2 \cdot e^{-\lambda}}{3} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{\dfrac{2 \cdot e^{-\lambda}}{3}}{e^{-\lambda}} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2 \cdot e^{-\lambda}}{3 \cdot e^{-\lambda}} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}$

$\lambda = \dfrac{2}{3} \approx \underline{0{,}66666}$ Svar: Marion säljer ungefär ett objekt per vecka i snitt.

4

b) Måste omvandla till ny tidsperiod, $\dfrac{2}{3} \cdot 4 = \dfrac{8}{3}$ $\quad X \sim Po(\lambda = \tfrac{8}{3})$

$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) \Rightarrow 1 - (P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4))$

$1 - \left(\dfrac{(\frac{8}{3})^0}{0!} \cdot e^{-\frac{8}{3}} + \dfrac{(\frac{8}{3})^1}{1!} \cdot e^{-\frac{8}{3}} + \dfrac{(\frac{8}{3})^2}{2!} \cdot e^{-\frac{8}{3}} + \dfrac{(\frac{8}{3})^3}{3!} \cdot e^{-\frac{8}{3}} + \dfrac{(\frac{8}{3})^4}{4!} \cdot e^{-\frac{8}{3}}\right)$

$1 - \left(1 \cdot e^{-\frac{8}{3}} + \left(\dfrac{8}{3}\right) \cdot e^{-\frac{8}{3}} + \dfrac{\left(\frac{64}{9}\right)}{2} \cdot e^{-\frac{8}{3}} + \dfrac{\left(\frac{512}{27}\right)}{6} \cdot e^{-\frac{8}{3}} + \dfrac{\left(\frac{4096}{81}\right)}{24} \cdot e^{-\frac{8}{3}}\right)$

$1 - \left(e^{-\frac{8}{3}} + \dfrac{8}{3} \cdot e^{-\frac{8}{3}} + \dfrac{64}{18} \cdot e^{-\frac{8}{3}} + \dfrac{512}{162} \cdot e^{-\frac{8}{3}} + \dfrac{4096}{1944} \cdot e^{-\frac{8}{3}}\right)$

$1 - (0{,}06948 + 0{,}18529 + 0{,}24704 + 0{,}21959 + 0{,}1464)$

$1 - (0{,}8678) = 0{,}1322$ Svar: Sannolikheten att Marion säljer mer än 4 objekt under de kommande 4 veckorna är 0,1322.

5

c) $W \sim Bin(12; 0{,}1322)$ $\quad$ W = antal fyraveckors-perioder som Marion säljer fler än 4 objekt.

$p(w) = \binom{n}{w} \cdot p^w (1-p)^{n-w}$ $\quad P(3) = \binom{12}{3} \cdot 0{,}1322^3 \cdot 0{,}8678^9 = \dfrac{12!}{3!\,9!} \cdot 0{,}1322^3 \cdot 0{,}8678^9$

$220 \cdot 0{,}1322^3 \cdot 0{,}8678^9 = 0{,}14187$ Svar: Sannolikheten att Marion säljer fler än 4 objekt under 3 av 12 fyraveckors-perioder är 0,14

5

d) U = totalt antal sålda objekt per vecka $\quad E(Y_1) = 1{,}1 \quad E(Y_2) = \dfrac{2}{3}$

$E(U) = E[E(Y_1) + E(Y_2)] = E(Y_1) + E(Y_2) = 1{,}1 + \dfrac{2}{3} \approx 1{,}76666$ objekt

$V(U) = V[V(Y_1) + V(Y_2)] = V(Y_1) + V(Y_2) + 2\,Cov(Y_1, Y_2)$ $\quad V(Y_1) = 0{,}49 \quad V(Y_2) = \dfrac{2}{3}$

$\sigma_1 = 0{,}7 \quad \sigma_2 = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \quad \rho = 0{,}37 \quad \dfrac{Cov(Y_1, Y_2)}{0{,}70 \cdot 0{,}81649} = 0{,}37 \Rightarrow Cov(Y_1, Y_2) = 0{,}37 \cdot (0{,}7 \cdot 0{,}81$

$Cov(Y_1, Y_2) = 0{,}21147$ $\quad V(U) = 0{,}49 + \dfrac{2}{3} + 2 \cdot 0{,}21147 = 1{,}579606$

Svar: Förväntat antal sålda objekt under en vecka är 1,8 medan variansen är 1,58.

6

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen **Anonymkod:** 0030-HXj **Blad nr:** 4

3

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{3}}, & 0 < y < 1 \\ \sqrt{\frac{y}{6}}, & 1 \le y \le 4 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

a)

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{2 \cdot (\sqrt{y})^3}{3 \cdot \sqrt{3}}, & 0 < y < 1 \\ \frac{2 \cdot (\sqrt{y})^3}{3 \cdot \sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}, & 1 \le y \le 4 \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

$F(y)$ då y $0 < y < 1$ $f(y) = \sqrt{\frac{y}{3}}$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^y \sqrt{\frac{t}{3}}\,dt = [1]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2t^{3/2}}{3}\right]_0^y$$

$$0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2 \cdot y^{3/2}}{3} - \frac{2 \cdot 0^{3/2}}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2 \cdot y^{3/2}}{3}$$

$F(y)$ då y $1 \le y \le 4$ $f(y) = \sqrt{\frac{y}{6}}$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 \frac{t^{1/2}}{\sqrt{3}}\,dt + \int_1^y \frac{t^{1/2}}{\sqrt{6}}\,dt$$

$$[1]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2t^{3/2}}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\frac{2t^{3/2}}{3}\right]_1^y$$

$$0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2 \cdot 1^{3/2}}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{2 \cdot 1^{3/2}}{3}\right)$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{2y^{3/2}}{3\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{2y^{3/2} - 2}{3\sqrt{6}}$$

5

b) $P(Y < 0,5) = F(0,5) = \frac{2 \cdot (\sqrt{0,5})^3}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{0,5}}{3^{3/2}} = 0,1360827$ följdfel

Svar: Sannolikheten är 0,136

3

c) $P(0,8 < Y < 2) = F(2) - F(0,8) = \frac{2 \cdot (\sqrt{2})^3}{3 \cdot \sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{2 \cdot (\sqrt{0,8})^3}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{6}} - \frac{1,6 \cdot \sqrt{0,8}}{3^{3/2}}$

$0,7698 - 0,2754 = 0,4944$ följdfel

3

Svar: Sannolikheten är 0,4944

d) $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)\,dy = \int_0^1 y \cdot \frac{y^{1/2}}{\sqrt{3}}\,dy + \int_1^4 y \cdot \frac{y^{1/2}}{\sqrt{6}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 y^{1/2}\,dy +$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \int_1^4 y^{1/2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2 \cdot y^{3/2}}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\frac{2 \cdot y^{3/2}}{3}\right]_1^4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2 \cdot 1}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{2 \cdot 4^{3/2}}{3} - \frac{2 \cdot 1^{3/2}}{3}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{6}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}$$

4

$0,3849 + 0,8165 = 1,2014$ Svar: väntevärdet är 1,2014

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviksalen **Anonymkod:** 0030-HXj **Blad nr:** 5

4 $Y \sim \text{Uniform}(\theta_2 = 45\,000, \theta_1 = 0)$ $f(y) = \begin{cases} \frac{1}{45\,000} & 0 \leq y \leq 45\,000 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

a) Vi måste först få fram väntevärdet av provisonen det ges av formeln $\mu = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{0 + 45\,000}{2} = 22\,500$

Totala lönen $= U$ $E(U) = E[c + E(Y)] = c + E(Y) = 20\,000 + 22\,500 = 42\,500$

En US dollar $= 9{,}7$ Kr delar den Svenska lönen med växelkursen

$\frac{42\,500}{9{,}7} \approx 4381{,}44$ Svar: Frankes totala lön i US dollar är ungefär 4381

0

b) $f(y) = \begin{cases} \frac{1}{45\,000}, & 0 \leq y \leq 45\,000 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$ $Y \sim \text{Uniform}(\theta_1 = 0, \theta_2 = 45\,000)$

Vi har med ordningsvärden att göra med, och söker täthetsfunktionen för den högsta bonusen av fem anställda

$f_{Y_{(n)}}(y) = g_{(n)}(y) = n[F_Y(y)]^{n-1} \cdot f_Y(y)$ fördelningsfunktionen är följande

$F(y) = \int_0^y \frac{1}{45\,000}\,dt = \left[\frac{t}{45\,000}\right]_0^y = \frac{y}{45\,000} - \frac{0}{45\,000} = \frac{y}{45\,000}$

$5\left[\frac{y}{45\,000}\right]^4 \cdot \frac{1}{45\,000}$

$\left[\frac{y^4}{45\,000^4}\right] \cdot \frac{5}{45\,000^1} = \frac{5y^4}{45\,000^5}$

Svar: $f_{Y_{(n)}}(y) = \begin{cases} \frac{5y^4}{45\,000^5}, & 0 \leq y \leq 45\,000 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

10

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen **Anonymkod:** 0030-HXj **Blad nr:** 6

5

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

a) $f_X(x) = \int_0^\infty x e^{-x-xy}\,dy = xe^{-x}\int_0^\infty e^{-xy}\,dy = xe^{-x}\left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_0^\infty$ ($\to 0$ då $y\to\infty$)

$xe^{-x}\left((0)-\left(\frac{e^{-x\cdot 0}}{-x}\right)\right) = xe^{-x}\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x}$

$f_Y(y) = \int_0^\infty xe^{-x(1+y)}\,dx \Rightarrow \left[x\cdot\frac{e^{-x(1+y)}}{-(1+y)}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-x(1+y)}}{-(1+y)}\cdot 1\,dx$

$\left[-\frac{x}{(1+y)\cdot e^{x(1+y)}}\right]_0^\infty - -\frac{1}{(1+y)}\int_0^\infty e^{-x(1+y)}\,dx = 0 + \frac{1}{(1+y)}\left[\frac{e^{-x(1+y)}}{-(1+y)}\right]_0^\infty$

$\to 0$ då $x\to\infty$ $\qquad$ $\to 0$ då $x\to\infty$

$\frac{1}{1+y}\left((0)-\left(\frac{1}{-(1+y)e^{0(1+y)}}\right)\right)$

$\frac{1}{(1+y)}\cdot\left(\frac{1}{(1+y)}\right) = \frac{1}{(1+y)^2}$

Svar: $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{annars}\end{cases}$ $\qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(1+y)^2}, & y>0 \\ 0, & \text{annars}\end{cases}$

12

b) Om oberoende råder ska $f_X(x)\cdot f_Y(y) = f(x,y)$

$e^{-x}\cdot\frac{1}{(1+y)^2} = \frac{e^{-x}}{(1+y)^2}$ $\qquad \frac{e^{-x}}{(1+y)^2} \neq xe^{-x(1+y)}$

2

Svar: De är inte stokastiskt oberoende, för dem är beroende.

c) X = Tiden det tar i sekunder för den första processorn att exekvera sin del av algon.

$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{annars}\end{cases}$

Vi söker mediantiden för den första processorn att exekvera sin del av algoritmen, dvs $F(\phi_{0,5}) = 0,5$ $\quad \phi_{0,5} = ?$

$\int_0^{\phi_{0,5}} f(x)\,dx = 0,5 \Rightarrow \int_0^{\phi_{0,5}} e^{-x}\,dx = 0,5 \Rightarrow \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{\phi_{0,5}} = 0,5$

$\left[-e^{-x}\right]_0^{\phi_{0,5}} = 0,5 \Rightarrow \left(\left(-e^{-\phi_{0,5}}\right)-\left(-e^{0}\right)\right) = 0,5 \Rightarrow -e^{-\phi_{0,5}}+1 = 0,5$

$1 = 0,5 + e^{-\phi_{0,5}} \Rightarrow 0,5 = e^{-\phi_{0,5}} \Rightarrow \ln(0,5) = \ln(e^{-\phi_{0,5}}) \Rightarrow -0,693147 = -\phi_{0,5}$

$\phi_{0,5} = 0,693147$

Svar: mediantiden för den första processorn att exekvera sin del av algoritmen är 0,693 sekunder.

6